Interactions entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire en France : cas des équations différentielles du premier ordre

Fernand Malonga Moungabio

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (PARIS 7)

ÉCOLE DOCTORALE Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines

DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

AUTEUR : MALONGA MOUNGABIO Fernand

Titre :

INTERACTIONS ENTRE LES MATHEMATIQUES ET LA PHYSIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE EN FRANCE.
CAS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE

INTERACTIONS BETWEEN MATHEMATICS AND PHYSICS IN SECONDARY EDUCATION IN FRANCE.
CASE OF THE FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Thèse dirigée par Bernard Parzysz

Soutenue le 30 Septembre 2008

Jury :

M. Bernard PARZYSZ : professeur émérite à l'IUFM d'Orléans-Tours	Directeur
M. Daniel BEAUFILS : maître de conférences à l'IUFM de Versailles	Co-directeur
M. Marc ROGALSKI : professeur émérite à l'université de Lille-1	Rapporteur
M. Jean-Jacques DUPIN : professeur émérite à l'IUFM d'Aix-Marseille	Rapporteur
M. Hamid CHAACHOUA : maître de conférences à l'IUFM de Grenoble	Examinateur
M. Fabrice VANDEBROUCK : maître de conférences à l'université Paris-Diderot	Examinateur

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (PARIS 7)

ÉCOLE DOCTORALE Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines

DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

AUTEUR : MALONGA MOUNGABIO Fernand

Titre :

INTERACTIONS ENTRE LES MATHEMATIQUES ET LA PHYSIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE EN FRANCE.
CAS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE

INTERACTIONS BETWEEN MATHEMATICS AND PHYSICS IN SECONDARY EDUCATION IN FRANCE.
CASE OF THE FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Thèse dirigée par Bernard Parzysz

Soutenue le 30 Septembre 2008

Jury :

M. Bernard PARZYSZ : professeur émérite à l'IUFM d'Orléans-Tours	Directeur
M. Daniel BEAUFILS : maître de conférences à l'IUFM de Versailles	Co-directeur
M. Marc ROGALSKI : professeur émérite à l'université de Lille-1	Rapporteur
M. Jean-Jacques DUPIN : professeur émérite à l'IUFM d'Aix-Marseille	Rapporteur
M. Hamid CHAACHOUA : maître de conférences à l'IUFM de Grenoble	Examinateur
M. Fabrice VANDEBROUCK : maître de conférences à l'université Paris-Diderot	Examinateur

Table de matière

INTRODUCTION

Le travail que nous présentons ici est centré sur les problèmes d'articulation des équations différentielles entre les deux disciplines scientifiques que sont les mathématiques et la physique. L'origine de ce travail vient de deux constats :

Un premier constat sur l'évolution des contenus des programmes de mathématiques du cycle terminal au sujet des équations différentielles. Le programme actuel, diffusé en 2001 et mis en application en 2002, réserve une part plus réduite aux équations différentielles que les précédents : les équations différentielles du second ordre ne sont plus au programme. Le seul type d'équation retenu est celui du premier ordre, de la forme $y' = ay$ (a étant un réel non nul).

Un deuxième constat sur leur lien très fort avec les programmes de physique. En effet, le nouveau programme (2002) accorde une place plus large à la notion de "modélisation" ; l'enseignement des équations différentielles, mais aussi d'autres domaines (fonction exponentielle, probabilité ...) s'accompagne d'une étude des situations s'appuyant sur des phénomènes physiques sous des modèles soit continus, soit discrets. Il doit être mis en relation avec le programme de physique dont le thème central est « l'étude des phénomènes continus en fonction du temps ».

Par ailleurs, en physique, cette période (2002) coïncide avec celle de la publication des nouveaux programmes qui sont aussi, comme en mathématiques, très novateurs. Les équations différentielles du premier ordre sont introduites pour la première dans la classe de terminale.

De plus, le thème des équations différentielles a fait l'objet d'une réflexion par le Groupe d'Experts des Programmes Scolaires (GEPS). Le document d'accompagnement des programmes rédigé par les membres de ce groupe incite très fortement les enseignants des deux disciplines à mener un travail conjoint autour de la notion d'équation différentielle.

L'objectif principal de ce travail consiste alors à analyser la nature et le développement des relations didactiques autour des équations différentielles. Il s'agit de tenter de cerner la manière dont la "collaboration" décrite dans le nouveau programme de mathématiques et le document d'accompagnement de ce programme se concrétise dans l'enseignement des équations différentielles, entre les mathématiques et la physique et ce, à divers niveaux : technologico-théorique (conceptuels), technique, mais aussi personnel (points de vue des enseignements des deux disciplines). Plus précisément, nous essayons d'analyser les conditions de viabilité des interactions entre les mathématiques et la physique sur le sujet des équations différentielles.

Ce document se compose de 3 parties :

La première partie comprend trois chapitres. Dans le chapitre I, nous présentons un aperçu historique sur l'apparition et l'évolution des équations différentielles. Ce chapitre permet de montrer combien les relations entre les mathématiques et la physique n'ont cessé de se renforcer dans l'histoire du développement de la théorie des équations différentielles. Dans le chapitre II, nous présentons les apports de quelques travaux didactiques relatifs à l'enseignement des équations différentielles, nécessaires à la problématique de cette recherche. Ces travaux nous ont amené à pointer la complexité de la modélisation dans l'enseignement des équations différentielles. Ce chapitre II permet de situer notre problématique (décrite dans le chapitre III), en s'interrogeant sur les choix didactiques de la noosphère et sur les contraintes qui pèsent actuellement sur l'enseignement des équations différentielles, à la fois en mathématiques et en physique. Nous y présentons les éléments des cadres théoriques qui sont utiles à notre recherche.

La deuxième partie se compose aussi de 3 chapitres. Nous consacrons le chapitre IV à une analyse des programmes scolaires de terminale scientifique, en mathématiques et en physique. Nous montrons dans ce chapitre les différents « habitats » (au sens de l'écologie des savoirs) occupés par les équations différentielles dans les programmes successifs depuis les années 60. L'analyse des programmes est suivie d'une analyse des manuels de mathématiques et de physique (C'est le chapitre V). Le chapitre VI est consacré à la méthode d'Euler. C'est au sein de ce chapitre que nous tentons de cerner les enjeux d'une interaction mathématiques – physique, la place réservée à l'outil informatique dans l'enseignement des équations différentielles en classe de terminale et la manière dont sont pris en charge les différents registres sémiotiques permettant de présenter et de traiter les équations différentielles dans les deux disciplines.

La troisième partie est composée d'un seul chapitre ; c'est le chapitre VII dans lequel nous avons recueilli le point de vue d'enseignants des deux disciplines sur les intentions didactiques des concepteurs des programmes. Ce chapitre permet aussi de relever les écarts entre les réalités institutionnelles (dans les programmes et les manuels) et les réalités dans les classes.

Partie 1

CHAPITRE I :

APERÇU HISTORIQUE SUR LES RELATIONS ENTRE LES MATHÉMATIQUES ET LA PHYSIQUE

Les équations différentielles apparaissent comme l'un des thèmes "phares" alimentant la relation entre les mathématiques et la physique dans les programmes actuels de l'enseignement secondaire des classes de terminale S. Il importe de souligner qu'au niveau du savoir savant, mathématiques et physique entretiennent depuis toujours des rapports étroits.

L'histoire montre en effet comment les champs scientifiques que sont aujourd'hui les mathématiques et la physique ont fait évoluer la science en se prêtant à un jeu d'échanges dialectiques. Elle témoigne de la proximité des démarches entre mathématiciens et physiciens.

> « Quels sont les premiers physiciens ? Des mathématiciens ! Inversement, quels sont les premiers mathématiciens ? Des physiciens ! » (Lehning 2003)

Les mathématiques sont présentes dans la physique depuis plusieurs siècles et cela n'a cessé de se renforcer. Les théories physiques s'imprègnent de plus en plus des connaissances mathématiques. Aujourd'hui, relativité générale et physique quantique reposent sur des formalismes mathématiques très abstraits. Le rôle important joué par les mathématiques dans le développement de la physique tourne essentiellement autour de deux pôles : *langage* et *outil.*

L'idée d'un langage mathématique pour la physique est introduite par Galilée.

> « Elle [*la physique*] ne peut être pensée et véritablement comprise sans faire appel à un langage précis relevant des mathématiques. Celles-ci ne fournissent pas seulement des outils à la physique, comme elles le font pour d'autres sciences ; elles en constituent le langage même, comme Galilée l'affirmait déjà avec force : "On ne peut comprendre ce livre immense perpétuellement ouvert devant nos yeux, l'Univers, si l'on n'apprend pas d'abord à connaitre la langue et les caractères dans lesquels il est écrit : il est écrit en langue mathématique et ses

> caractères sont des figures géométriques sans l'intermédiaire desquelles il est impossible de comprendre un mot" » (Balian et *al.* 2005).

Un autre point de vue est de considérer que les mathématiques sont un *pourvoyeur d'outils* (ou bien *outil*) nécessaires à la compréhension et donc, au développement de la physique. Les découvertes qui se font au sein des mathématiques semblent toujours trouver des échos en physique.

On peut citer l'exemple de la relativité générale, qui repose sur les géométries non euclidiennes dont les bases sont jetées par les mathématiciens Lobatchevski, Gauss, Boliay Riemann (Bottazzini et *al.* 2000). Le problème de départ remonte à l'antiquité. Il consiste à démontrer le postulat d'Euclide selon lequel « par un point, il passe une et une seule parallèle à une droite donnée ». D'autres exemples comme les espaces abstraits, étudiés auparavant par Hilbert dans un contexte intra-mathématique, ont trouvé des applications en physique quantique.

La découverte et le développement de certaines connaissances mathématiques (comme les équations différentielles apparues au XVII^{e} siècle) ont contribué à l'évolution des rapports entre les deux domaines que sont les mathématiques et la physique.

Nous présentons ci-après un rapide tour d'horizon historique sur le développement des équations différentielles et les méthodes utilisées pour leur résolution. Nous ne visons pas bien sûr l'exhaustivité car bien de travaux ou publications ont été consacrés à cette problématique historique des relations entre les mathématiques et la physique (De Gennes PG et *al.* 1994, Atten 1996, Friedelmeyer 2001, Moatti et *al.* 2006, Penrose 2007 etc.). Nous avons toutefois insisté sur les questions du traitement numérique, et en particulier sur l'approche d'Euler pour le traitement des équations différentielles, en raison de l'apparition de la méthode d'Euler dans les programmes scolaires actuels des mathématiques et de physique.

I. Aperçu historique sur le développement des équations différentielles

I.1. Apparitions et développement des équations différentielles

Le concept d'équation différentielle est apparu à la fin du XVII^e siècle à partir de la diffusion des résultats du calcul différentiel et intégral inventé par Newton et Leibniz :

> « La mathématisation progressive de la physique, l'investissement du calcul infinitésimal dans l'analyse des phénomènes naturels, sont à l'origine de l'éclosion de nouvelles branches des mathématiques :
> l'étude des phénomènes mécaniques et physiques en général se traduit par l'établissement d'équations différentielles, dont l'intégration sera l'objet d'un domaine de l'analyse ; ... »
> (Dahan-Dalmedico *et al.* 1986, p. 198)

Les équations différentielles, considérées alors comme une relation entre des variations infinitésimales de deux ou plusieurs quantités variables, renforcent les rapports entre les mathématiques et les autres sciences.

La mécanique classique fut un terrain privilégié du développement et des applications de la théorie des équations différentielles. Selon Hubbard & West (1999, p. 5), historiquement, la première équation différentielle considérée en tant que telle apparut quand Euler tenta d'exprimer les lois de Newton sur l'attraction des corps sous la forme différentielle. En effet, Plusieurs corps de masses respectives m_i $(i = 1, 2, ..., n)$ soumis aux seules forces d'attraction qu'ils exercent les uns sur les autres donnent lieu à un système non linéaire d'équations différentielles- encore appelé « équation de Newton » - :

$$m_i X_i''(t) = G\sum_{j\neq i} m_i m_j \frac{X_j - X_i}{\left\|X_j - X_i\right\|^3}, \ (i = 0, 1, ..., n).$$

$X_i(t)$ représente la position du corps de masse m_i à l'instant t,

$X''_i(t)$ son accélération à l'instant t,

G la constante de g gravitation (universelle)

I.2. Symbolisme des équations différentielles

De manière générale, d'après Dahan- Dalmedico *et al.* :

> « L'histoire des notations mathématiques est touffue : elle est faite d'une foule de tentatives, de retrouvailles, des règles qu'adopte personnellement tel ou tel mathématicien et qui disparaissent avec lui ». (Dahan-Dalmedico et *al.* 1986. p. 108)

Les principales notations utilisées pour exprimer les équations différentielles sont dues aux formalismes de Newton et Leibniz, donc au développement de la théorie du calcul différentiel et intégral.

I.2.1. Newton et les fluxions

Newton publie en 1736 la méthode des fluxions et des fluentes.

Newton appelle *fluxion des quantités*, des vitesses variables représentant des quantités mathématiques supposées être engendrées par le mouvement d'une ligne. En supposant un point qui parcourt cette ligne avec une vitesse variable, le rapport qu'il y a entre la vitesse de ce point à chaque instant et la vitesse uniforme de la ligne entière est celui de la fluxion de l'ordonnée $\dot{y}$ à la fluxion de l'abscisse $\dot{x}$. Newton publie en 1671 *Methodus fluxionum et serierum infinitum* dans lequel il présente les notions de fluentes et de fluxions à propos de divers problèmes :

> « J'appellerai quantités fluentes, ou simplement fluentes ces quantités que je considère comme augmentées graduellement et indéfiniment, je les représenterai par les dernières lettres de l'alphabet v, x, y et z (...) et je représenterai par les mêmes dernières lettres surmontées d'un point $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}$ *et* $\dot{z}$ les vitesses dont les fluentes sont augmentées par le mouvement qui les produit et que par conséquent on peut appeler Fluxions ». (Dahan-Dalmedico *et al.* 1986, p. 192,).

Cette notation qui consiste à mettre un point au-dessus d'une quantité, fut adoptée par la plupart des géomètres anglais en tentant de clarifier les notions qui servent de base à la notion des fluxions, éliminant les difficultés philosophiques liées à l'ambiguïté du statut des éléments infinitésimaux, jugés parfois inconciliable avec l'intuition géométrique avérée prépondérante.

I.2.2. Leibniz et les différences finies

De son côté, Leibniz appelle *différence* ce que Newton appelle *fluxion.* Il adopte une notation qui consiste à mettre un *d* par devant pour exprimer une différence. Avec ses nouvelles notations, Leibniz sera le premier à donner un sens au quotient $\frac{dy}{dx}$ lorsque *y* est une fonction de *x.* Selon Laroche (2003, p. 137) ce quotient apparaît pour la première fois avec le triangle caractéristique (voir Figure 1) qui est le triangle *MNP*, constitué de *dx, dy* et de l'arc *MN.*

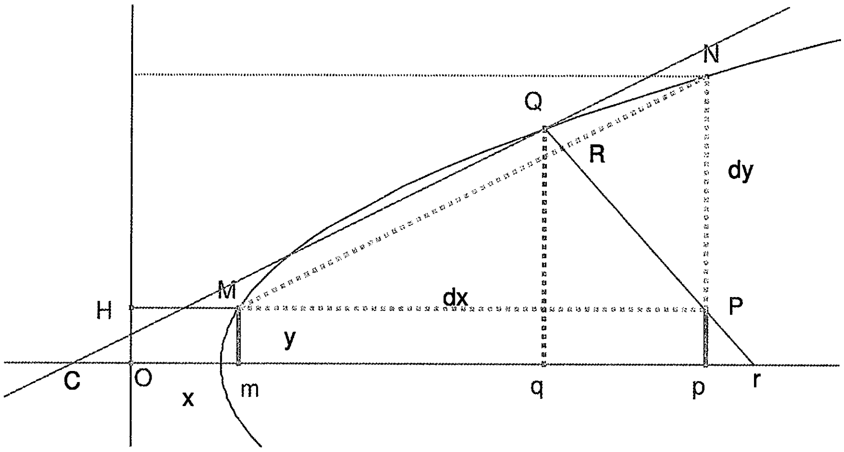


Figure 1 : triangle caractéristique de Leibniz[1]

« Leibniz sera d'ailleurs fortement inspiré par les travaux de Pascal (sur les Sinus) ...
Par similitude des triangles *QqC, MNP* et *Qqr* (*QC* est parallèle à *MN*), Pascal avait vu que $\frac{rQ}{qQ} = \frac{MN}{mp} = \frac{MN}{NP}$, et pour un intervalle *mp* petit, le segment de droite *MN* est identifiable à l'arc *MN* (en longueur). Leibniz conclut alors que $\frac{dx}{dy} = \frac{Qq}{Cq}$. Ce que Pascal n'avait pas vu c'est la détermination de la tangente par la différence des ordonnées $NP - Np$ sur la différence des abscisses $Cp - Cm$. La normale (longueur du segment perpendiculaire à la tangente) est *Qr*, la sous-normale est $qr = w$. Toujours par similitude, Leibniz peut écrire $\frac{dx}{dy} = \frac{w}{y}$ ou encore $wdx = ydy$. »

Leibniz fera ensuite le lien entre tangente, triangle caractéristique, dérivation et intégration avant de publier dans les *Acta eruditorum* l'essentiel des bases du calcul différentiel.

I.3. Méthodes de résolution des équations différentielles

Historiquement, la théorie des équations différentielles s'est développée dans une panoplie de cadres (Chau & *al.* 1999), parmi lesquels on peut retenir principalement les trois suivants (Artigue 1989)[2] : cadre algébrique, cadre numérique et cadre géométrique :

[1] Pour plus d'informations à ce sujet, on peut se reporter à Laroche (2003), Leipzig (1686),

[2] La notion de "cadre" utilisée par M. Artigue pour caractériser les domaines mathématiques où sont apparues les équations différentielles est issue des travaux de R. Douady (Douady 1984). Pour établir cette typologie, Artigue affirme que la notion de cadres est bien adaptée puisque,

Le cadre algébrique sera pour nous celui de la résolution " exacte" par des formules explicites, expressions finies, développement en séries, expressions intégrales ; le cadre numérique sera celui de la résolution numérique approchée ; le cadre géométrique sera enfin celui de l'étude qualitative du flot de l'équation.
(Artigue 1989, p. 183)

I.3.1. Méthodes algébriques

Les méthodes algébriques sont les premières méthodes apparues pour la résolution des équations différentielles. L'étude des phénomènes physiques continus en fonction du temps a permis l'apparition de nombreuses équations différentielles et en même temps, le développement des méthodes pour les traiter. Jacques Bernoulli (1654-1705) est cité comme le premier à construire les premières méthodes de résolution (algébriques) des équations différentielles. Newton, quant à lui, développe une méthode de résolution à partir des séries :

Pour trouver la fonction f, solution d'une équation différentielle, $\frac{df}{dx} = kf$ par exemple, on écrit la fonction f sous la forme d'une somme de puissances :

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots + a_j x^j + \ldots$$

On dérive ensuite : $$\frac{df}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + j a_j x^{j-1} + \ldots$$

or, $$kf = k a_0 + k a_1 x + k a_2 x^2 + k a_3 x^3 \ldots + k a_j x^j + \ldots$$

et comme $kf = \frac{df}{dx}$ quel que soit x, on identifie terme à terme

$$a_1 = k a_0 \; ; \qquad a_2 = k\frac{a_1}{2} = \frac{k^2 a_0}{2} \; ; \ldots \; a_j = \frac{k^j a_0}{2} ! \ldots$$

Ainsi $$f = a_0 (1 + kx + (\frac{k^2}{2}) x^2 + \ldots + (\frac{k^j}{j!}) x_j + \ldots).$$

La valeur de a_0 est déterminée par la condition initiale, qui est la valeur de la fonction pour x égal à zéro. On reconnaît ici, sur ce cas très simple et facile à intégrer directement, le développement de la fonction exponentielle.

« à chacun de ces cadres est attachée une problématique de la résolution des équations différentielles et que ces problématiques ont conduit au développement des méthodes et des résultats spécifiques » (Artigue 1989).

Cette méthode, comme la plupart des méthodes algébriques, fonctionne bien sur des cas simples mais devient laborieuse lorsqu'on se heurte à trop de problèmes de convergence. Ainsi la résolution algébrique ne permet pas de traiter toutes les équations différentielles qui apparaissent. Certaines solutions ne sont pas déterminées de manière exacte, car trop complexes. Cependant il a été possible d'obtenir une "visualisation" des solutions par approximation numérique.

I.3.2. Méthodes numériques

Les travaux de Newton et de Gregory (1638-1675) ont permis de mettre sur pied une méthode de résolution numérique de certaines équations différentielles.

Nous présentons ci-dessous un exemple d'intégration numérique d'équation ordinaire du premier ordre. Cet exemple est un cas de quadrature numérique utilisant des différences finies. Pour plus de détails sur l'histoire des quadratures, on pourra se reporter à Goldstine (1977), Chabert *et al.* (1994), Tournès (1996, 1998).

Soit à calculer approximativement la valeur, en un point x, de la solution y du « problème de Cauchy » $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ avec la condition $y(x_0) = y_0$.

Ceci revient à calculer l'intégrale $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u)du$

Dans le cas d'une subdivision de l'intervalle dans lequel se situe la variable x en valeurs équidistantes x_i

> « Supposant qu'on connaisse les valeurs de f en $x_0, x_1 \ldots x_n, \ldots$ [c'est-à-dire $f(x_0)=f_0, f(x_1)=f_1 \ldots f(x_n)= f_n$]. A partir de ces données, le problème est de construire une table analogue pour la primitive y, autrement dit de calculer des valeurs approchées de y aux points x_i
>
> Le cas le plus simple et le plus fréquent est celui de valeurs équidistantes de la variable. Si h désigne le pas utilisé, on a alors $x_i = x_0 + ih$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots$.
>
> En posant fi = f(xi), on peut former le tableau des différences finies progressives

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
f_0 & & f_1 & & f_2 & & f_3 & & f_4 & & \ldots \\
& \Delta f_0 & & \Delta f_1 & & \Delta f_2 & & \Delta f_3 & & \ldots & \\
& & \Delta^2 f_0 & & \Delta^2 f_1 & & \Delta^2 f_2 & & \ldots & & \\
& & & \Delta^3 f_0 & & \Delta^3 f_1 & & \ldots & & & \\
& & & & \Delta^4 f_0 & & \ldots & & & &
\end{array}
$$

Ces différences finies sont définies, de proche en proche, par

$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ *et* $\Delta^m f_i = \Delta^{m-1} f_{i+1} - \Delta^{m-1} f_i$

Une des premières formules d'interpolation, utilisée dès le XVIIe siècle, est la formule de Gregory-Newton. En posant $t = \dfrac{x - x_0}{h}$, elle s'écrit :

$$f(x) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!}\Delta^3 f_0 + \ldots \qquad (2)$$

Remarquons que, par troncature au rang n, on obtient l'approximation

$$f(x) \approx P_n(x) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!}\Delta^3 f_0 + \ldots + \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}{n!h^n}\Delta^n f_0$$

où P_n est le polynôme de degré au plus n qui coïncide avec f en les n+1 points $x_0, x_1 \ldots x_n$ *(...)*

La valeur de y en x_1, soit y_1, s'obtient alors par intégration terme à terme de la série

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = y_0 + h\int_0^1 f(x_0 + ht)dt$$

$$= y_0 + hf_0 + h\int_0^1 tdt\Delta f_0 + h\int_0^1 \frac{t(t-1)}{2!}dt\Delta^2 f_0 + h\int_0^1 \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}dt\Delta^3 f_0 + \ldots$$

$$= y_0 + h\,\{f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{24}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{720}\Delta^4 f_0 \ldots\}$$

Pour pouvoir intégrer l'équation différentielle (1) avec la condition $y(x_0) = y_0$, il faudrait connaître $f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), \ldots, f(x_n, y_n)$, autrement dit les valeurs y_1, $y_2, \ldots$ y_n que l'on souhaite précisément calculer ». (Tournès 1998, p.8-9)

L'adaptation de cette méthode à la résolution de l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx}$ = f(x,y) avec la condition $y(x_0) = y_0$ est possible si l'on connait les valeurs[1] de f en des points $\ldots x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0$.

On peut définir par récurrence des différences finies régressives (ce qui est une extrapolation), en posant (Tournès 1999, Chabert 1994) :

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \text{ et } \nabla^m f_i = \nabla^{m-1} f_i - \nabla^{m-1} f_{i-1}$$

Pour pouvoir calculer y_1, il suffit de connaître $f(x_{-n}, y_{-n}), \ldots, f(x_0, y_0)$,

1 Dans la pratique, ces valeurs peuvent être calculées au moyen d'une formule analytique, lues dans une table ou issues de mesures expérimentales.

> « Ainsi la méthode est praticable à l'ordre *n*, à condition de disposer déjà des valeurs de la solution pour *n* pas ». (Tournès 1998)

Le traitement des équations différentielles par des méthodes numériques relève d'une problématique très ancienne. La méthode d'Euler est publiée en 1768 par Euler dans son ouvrage intitulé *Institutionum calculi integralis.* C'est donc à Euler que l'on doit la première méthode efficace de résolution approchée d'une équation différentielle. Cependant, cette méthode, connue sous le nom de « méthode d'Euler », se présente aujourd'hui sous des formes plus évoluées comme les méthodes dites de « Runge-Kutta ». Il fut alors développé des méthodes à pas liés, dites « multipas », ou à pas séparés que nous ne présentons pas dans ce travail. Le principe de ces méthodes repose sur des techniques de calcul de tables numériques développées par les astronomes anglais au XIX^{e} siècle, à partir des travaux de Newton sur le calcul des différences finies, l'interpolation polynomiale et l'application au calcul approché des intégrales.

I.3.3. Méthodes qualitatives

Au début du XIX^{e} siècle, l'étude du problème à N corps fait apparaître des équations différentielles linéaires et non linéaires. Les méthodes algébriques et numériques déjà disponibles, ne suffisent pas pour résoudre ces équations différentielles. En s'appuyant sur les travaux de Cauchy, C. Briot, J. C. Bouquet et L. I. Fuchs sur l'étude des propriétés des courbes intégrales au voisinage d'un point, laissant ainsi de côté le point de vue analytique, H. Poincaré a eu le mérite de développer une approche géométrique pour l'étude des équations différentielles. Cette approche lui permet d'étudier *géométriquement* l'ensemble des solutions d'une équation différentielle qu'on ne sait pas intégrer. Ainsi, il publie un mémoire en 1880 qui marque la naissance de la « théorie qualitative » des équations différentielles. Dans ce mémoire,

> « Poincaré rompt avec l'approche analytique complexe locale qui domine alors. Cette rupture se manifeste par un retour au domaine réel, l'abandon du point de vue local au profit d'une étude globale du flot de l'équation et l'abandon du point de vue analytique ».
> (Artigue 1989, p. 185)

La théorie qualitative des équations différentielles, affirme J. Dieudonné[3], est « *l'un des rares exemples de théorie mathématique qui semble naître à partir de rien, et qui, presque*

[3] Les Génies de la Science (Novembre 2000) : Poincaré philosophe et mathématicien. *Pour la science* p. 47

immédiatement, atteint la perfection entre les mains de son créateur ». La résolution qualitative consiste à étudier les propriétés globales (comportement asymptotique, allure générale, etc.) des courbes solutions à partir de l'équation différentielle de la forme y'=f(x, y). C'est une approche qui suggère également une méthode graphique d'approximation pour dessiner les trajectoires des courbes solutions (Arslan 2005, p. 30). Cette étude exige également d'élucider les caractéristiques des solutions et de justifier, parmi les solutions, l'existence ou la non-existence d'une forme de courbe donnée.

II. Introduction et développement de la méthode d'Euler

Nous nous sommes proposé de présenter dans cette partie la manière dont la méthode d'Euler a été introduite et s'est développée dans l'histoire.

II.1. La question de l'Intégration approchée

La théorie de l'intégration des équations différentielles s'est développée à travers une panoplie de méthodes. Les méthodes numériques sont apparues tardivement après une domination des méthodes algébriques (résolution exacte).

Pour ce qui est des méthodes numériques, elles ont été développées pour suppléer les méthodes d'intégration exacte dans le contexte de la résolution des équations différentielles. Euler est cité parmi les premiers mathématiciens qui envisagent une intégration[3] approchée dans le but de pallier l'insuffisance des méthodes d'intégration des équations différentielles par les séries. La méthode d'Euler est considérée comme le premier procédé d'intégration numérique. C'est une méthode dite à *un pas* ou *à pas séparés* du fait qu'à chaque étape de calcul de la valeur approchée d'une fonction y_{k+1}, n'intervient que la valeur précédente y_n. D'autres méthodes numériques, plus performantes, ont été développées depuis pour pallier les insuffisances de la méthode d'Euler.

3 En mathématiques, on utilise souvent le terme d'« intégration » pour parler de la « résolution » des équations différentielles (peut-être parce que, dans le cas particulier de l'équation y' = f(x), les solutions s'obtiennent par intégration de f.).

II.2. La méthode d'Euler

II.2.1. Le principe de la méthode

Euler est l'un des premiers à exploiter l'idée polygonale dans ces travaux. Pour intégrer certaines équations différentielles, il montre le caractère insuffisant de la méthode des séries et publie en 1768 son ouvrage intitulé *Institutionum calculi integralis.* Pour résoudre le *problème 85* de cet ouvrage, il y propose une méthode itérative.

> **Problème 85 :** Etant donné une équation différentielle, en trouver une intégrale complète très proche.

Nous ne présentons ici l'utilisation de la méthode d'Euler que dans le cas de la résolution des équations différentielles ordinaires de type

$\frac{dy}{dx} = V(x, y)$ avec les (la) condition(s) initiale(s) $y = b$ lorsque $x = a$.

La méthode d'Euler consiste à déterminer les valeurs de la solution correspondante en les calculant de proche en proche. Ainsi, l'on cherche d'abord la valeur de y lorsque la valeur de x est $a + \omega$.

Comme ω est une « petite » quantité, on suppose souvent que la valeur de y sera très voisine de b et V constant dans l'intervalle $[a, a + \omega]$.

Ainsi, si l'on pose $x = a$, $y = b$ et $V(a, b) = A$, alors, en raison de la très petite variation, on peut écrire $\frac{dy}{dx} = A$ et calculer

$$a' = a + \omega \qquad et \qquad b' = b + A\omega$$

Les valeurs de y calculées à partir de valeurs successives de x assez rapprochées les unes des autres peuvent donc s'écrire :

$$b' = b + A(a' - a).$$
$$b'' = b' + A'(a'' - a')$$

....

On peut ainsi trouver des valeurs de y aussi éloignées que l'on voudra des valeurs initiales en itérant l'opération sur de petits intervalles. Ce qui peut être résumé par ce texte de Leonhard Euler traduit du latin :

> « De même qu'ici, à partir des valeurs initiales x = a et y = b, nous avons trouvé les valeurs suivantes très proches x = a + ω et y = b + Aω, de même on peut progresser à partir d'elles, au

moyen d'intervalles très petits, jusqu'à ce que l'on parvienne enfin à des valeurs aussi éloignées que l'on voudra des valeurs initiales. Pour mettre plus clairement en évidence ces opérations, disposons-les de la façon suivante[4] ». (Teubner 1913, p. 424, Trad. Michel-Pajus)

Ipsius	Valores successivi						
x	a,	A',	A'',	a''',	a^{IV},	...	'a,	X
y	b,	B',	B'',	b''',	b^{IV},	...	'b,	Y
V	A,	A',	A'',	A''',	A^{IV},	...	'V,	V

Extrait de *Institutionum calculi integralis p. 425*

On voit bien que la méthode d'Euler est une méthode numérique. Elle a en effet pour but de calculer une table de valeurs approchées d'une fonction définie implicitement par une équation différentielle et une condition initiale. Cette méthode marque un changement de cadre significatif, en se proposant d'intégrer les équations différentielles par une approche numérique.

Notons au passage que le terme "valeur approchée d'une fonction" renvoie à trois concepts très proches, mais qui n'ont pas nécessairement la même signification : approximation, interpolation et extrapolation.

Approximation, interpolation et extrapolation

Dans les problèmes numériques, il arrive de travailler très souvent avec une fonction f, connue en un nombre de points finis $((x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ et dont l'expression algébrique est compliquée (ou mal connue ou bien encore inconnue). L'approximation consiste à substituer à la fonction f une fonction connue P, en cherchant à minimiser la distance qui sépare les deux fonctions, et donc l'erreur commise en approximant f par P. Mais trouver la meilleure estimation n'est pas toujours facile.

L'interpolation, quant à elle, impose de plus que les fonctions f et P coïncident pour un certain nombre des valeurs de la variable x_j ($j = 0, 1, 2, \ldots, n$) ; c'est donc un cas particulier de l'approximation.

[4] « Quemadmodum ergo hic ex valoribus initio datis x = a et y = b proxime sequentes x= a + ω et y = b + Aω invenimus, ita ab his simili modo per intervalla minima ulterius progredi licet, quoad tandem ad valores a primitivis quantumvis remotos perveniatur. Quae operationes quo clarius ob oculos ponantur, sequenti modo successive instituantur ».

Interpoler vient du latin « Interpolare » ce qui signifie réparer. L'utilisation scientifique des termes "interpoler" et "interpolation", remonte au début du XIXe siècle :

> Ils expriment tous deux l'action consistant à intercaler des valeurs intermédiaires dans une série de valeurs connues … L'interpolation d'une fonction sur un intervalle correspond au calcul approché de la valeur de la fonction d'une fonction en un point à partir de la donnée d'autres valeurs, cette fonction n'étant pas nécessairement déterminée
>
> (Chabert et *al.* 1994, p. 356).

L'interpolation linéaire est la plus élémentaire. Elle suppose que la fonction inconnue (à interpoler), évolue linéairement entre chaque paire de points successifs connus (ce qui est localement vrai pour les fonctions « ordinaires »). Elle consiste à remplacer une fonction f, dont on connaît les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ pour deux valeurs a et b de la variable, par la fonction affine h prenant les mêmes valeurs en a et b, à savoir :

$$h(x) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}x + \frac{bf(a) - af(b)}{a - b}$$

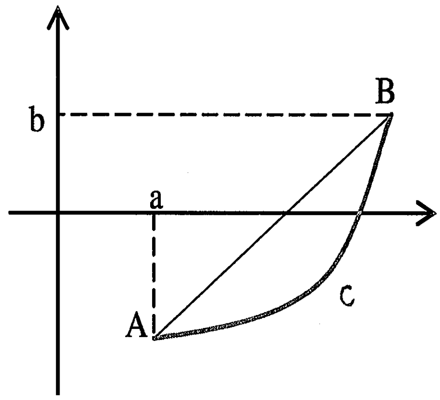


Figure 2 : Représentation d'une courbe et de son approximation par interpolation linéaire

À la lumière de ce qui précède, on peut reconnaitre que la méthode d'Euler utilise le principe d'approximation car elle permet de trouver des valeurs approchées d'une fonction définie par une équation différentielle.

II.2.2. Critiques de la méthode d'Euler

Dans la méthode d'Euler, le seul point exact est le point initial donné par les coordonnées $A_0(a\,;\,b)$. Le deuxième point $A_1(a'\,;\,b')$ s'obtient à partir du point initial $A_0(a\,;\,b)$.

$$\textit{avec } a' = a + \omega \textit{ et } b' = V(a + \omega).$$

b' s'obtient par un calcul approché.

Lorsque l'on prend des intervalles plus petits, le calcul de chaque valeur de y conduit à une approximation et les erreurs commises s'accumulent en plus grand nombre. Par ailleurs, le fait de considérer la fonction V comme une constante dans chaque intervalle engendre une succession d'erreurs, ce qui est d'autant plus vrai lorsque les intervalles ne sont pas petits.

Une interprétation géométrique de cette méthode conduit à constater qu'il y a, à chaque étape, deux sources d'erreurs :

On part d'un point qui, à part le premier, n'est pas exactement sur la courbe solution.

On confond la courbe avec un segment de tangente.

Il semble évident que le nombre d'erreurs est fonction du nombre d'étapes. Lorsque les intervalles sont petits et plus nombreux, cela conduit, en effet, à une accumulation d'erreurs (quoique petites) venant des arrondis réalisés sur chaque valeur b calculée.

Par ailleurs, la méthode permet de donner une courbe plus proche de la courbe exacte si le pas de calcul change dans chaque intervalle.

> C'est une sorte d'invite à moduler la taille des intervalles successifs en fonction des variations constatées de V. d'où l'intérêt de ne pas prendre forcément des intervalles tous égaux.
>
> (Tournès 1996, p. 173)

C'est en ce sens que l'on peut comprendre la non-constance de l'amplitude des intervalles, dans la description qui est faite de la méthode d'Euler. Ainsi, la perfection de cette méthode, notamment la précision de l'erreur, devient une préoccupation d'Euler.

II.2.3. Amélioration de la méthode : approximation locale, série de Taylor

Afin de mieux évaluer la variation de V dans chaque intervalle, Euler tente d'apporter une amélioration de sa méthode en utilisant la série de Taylor. C'est en cela qu'il pense réduire les erreurs. Il propose de calculer la nouvelle valeur b' associée à $a' = a + \omega$ à partir d'une série de Taylor ; ainsi,

$$b' = b + A\omega + \tfrac{1}{2} B\omega^2 + 1/6\, C\omega^3 + 1/24\, D\omega^4 + \ldots \qquad \text{avec}$$

$$A = \frac{dy}{dx} = V$$

$$B = \frac{ddy}{dx^2} = \frac{dV}{dx} + V\frac{dy}{dx}$$

$$C = \frac{d^3y}{dx^3} \ \ldots\text{etc.}$$

Dans ce cas, on pourra se permettre d'utiliser des intervalles assez grands, puisque l'approximation locale de V se fait avec surtout plus de précision.

La méthode gagne en précision, en remplaçant sur chaque intervalle l'équation aux différences $\Delta y = V(x\,;\,y)\,\Delta x$ par l'équation aux différences plus précise

$$\Delta y = \sum_{k=1}^{m} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}[V(x;y)]\frac{\Delta x^k}{k!} \qquad \textbf{Équation (1)}$$

(y est une fonction de x et les dérivées sont prises par rapport à x).

Nous rappelons ici quelques commentaires rapportés par Tournès dans sa thèse (1996, p. 175) à propos de l'amélioration apportée par Euler, à travers l'équation (1) ci-dessus :

> « Perfectionner davantage la méthode précédente pour intégrer les équations différentielles avec plus de précision, afin de moins s'écarter de la vérité ».
>
> « Puisqu'ici nous avons tenu compte de la variation de la fonction V, il est permis dès lors de choisir des intervalles plus grands, et si nous voulions continuer à l'infini ces formules A, B, C, D etc., des intervalles aussi grands que l'on veut pourraient être ajoutés ; mais dans ce cas, on aura pour y une série infinie ».
>
> « Si pour la série trouvée nous prenons seulement les deux premiers termes, de sorte que y = b+ Aω, on aura la valeur précédente, d'où en même temps il est clair que l'erreur commise ici est égale à la somme des termes suivants ».
>
> « Or, même si nous prenons plusieurs termes pour la série trouvée, il conviendra de choisir des termes pas trop grands, de sorte que ω garde une valeur assez petite, surtout si les quantités B, C, D, etc. finissent par devenir très grandes ». (Tournès 1996, p. 175)

Tournès ajoute que l'apport essentiel d'Euler réside dans cette méthode améliorée et c'est elle qu'il conviendrait d'appeler *méthode d'Euler* (plus précisément *méthode d'Euler avec développement de Taylor*), seule digne d'être exposée dans un traité de calcul intégral destiné aux mathématiciens.

Pourtant, cela n'a pas suffi à satisfaire la curiosité mathématique de certains mathématiciens. Les critiques formulées par Lacroix (1814 vol.2 p. 409) viennent du fait qu'Euler a toujours utilisé sa méthode avec les dérivées premières pour les équations du premier ordre et avec les dérivées du second ordre pour les équations du second ordre. Euler n'a jamais cherché à améliorer la précision en prenant en compte les dérivées d'ordre supérieur. Lacroix pense que, dans le cas de la résolution des équations différentielles d'ordre assez grand, la méthode d'Euler est inexploitable car elle nécessite beaucoup de calculs.

L'apport des travaux de Cauchy et de Lipschitz dans l'amélioration de la méthode d'Euler est à saluer car ils montrent la convergence de la méthode.

II.2.4. La majoration de l'erreur due à la méthode d'Euler

Cauchy se servira de la méthode d'Euler pour démontrer le problème, connu depuis sous le nom de "problème de Cauchy", de l'existence et l'unicité d'une solution φ d'une équation différentielle générale du premier ordre

$y' = f(x, y)$ vérifiant une condition initiale $\varphi(x_0) = y_0$ donnée.

Cette démonstration fournit *a posteriori* une évaluation de l'erreur commise en utilisant la méthode d'Euler. Cauchy en a fourni une preuve rigoureuse vers 1820, dans *Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique* (Picard 1890). Il montre que l'erreur commise dans l'approximation est majorée par Kh où K est une constante et h le pas de la subdivision.

> En supposant que f, f'_x et f'_y sont continues, Cauchy montre que la valeur Y, obtenue par la méthode que nous appelons d'Euler, comme approximation de la valeur en X de la solution φ de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ qui vérifie $\varphi(x_0) = y_0$ est entachée d'erreur $|Y - \varphi(X)|$ au plus égale à :
>
> $$(B + AC)|X - x_0|e^{C|X-x_0|}h$$
>
> où A, B et C désignent les majorants respectifs de $|f|$ $|f'_x|$ $|f'_y|$ et h est le pas de la subdivision utilisée pour aller de x_0 à X. On peut écrire en particulier :
>
> $$|Y - \varphi(X)| \leq Kh$$
>
> où K est une constante ne dépendant que de X (et bien sûr des données f, x_0, y_0)
>
> (Chabert et *al.* 1994, p. 420)

On obtient, en principe, une précision aussi grande que l'on veut lorsque la valeur de h choisie est assez petite. Cependant, les erreurs d'arrondi s'accroissent avec la diminution de h. Enfin, la question de l'existence et de l'unicité de φ n'est pas résolue.

II.3. Le problème de Cauchy et l'existence et l'unicité des solutions

II3.1. Théorème d'existence d'une solution (Cauchy)

De nombreux textes historiques scientifiques créditent Cauchy d'avoir été le premier à poser et à résoudre le problème de l'existence et de l'unicité de la fonction φ, solution d'une équation différentielle générale du premier ordre $y' = f(x, y)$ vérifiant une condition initiale $\varphi(x_0) = y_0$ donnée.

La recherche des hypothèses permettant d'affirmer ou non l'existence et l'unicité de φ s'est avérée nécessaire pour les mathématiciens.

Vers 1824, Cauchy expose une démonstration de l'existence de l'unicité d'une solution de l'équation différentielle $y' = f(x\,;\,y)$ (qui ne sera révélée que bien plus tard, d'après Christian Gilain (1981)). Cauchy part de l'approximation de Y fournie par la méthode d'Euler appliquée à l'intervalle $[x_0\,;\,X]$ pour une subdivision donnée. En utilisant la majoration de l'erreur, il montre que, avec des hypothèses assez générales (f et f'_y continues au voisinage de $(x_0\,;\,y_0)$) et en faisant tendre vers zéro le pas de subdivision, la valeur approchée Y tend vers une limite qui ne dépend que de X. Il ne lui reste plus qu'à prouver que la fonction définie ainsi, en faisant varier X au voisinage de x_0, est bien solution de l'équation différentielle donnée. Cauchy démontre l'existence d'une solution au voisinage des conditions initiales par une sorte de passage à la limite dans la méthode d'Euler.

II.3.2. Théorème de Cauchy-Lipschitz

En 1868, Lipschitz améliore le théorème d'existence de Cauchy. En supposant toujours la continuité de f, il remplace la continuité de f'_y par rapport à y par une condition (dite depuis de *Lipschitz*) dans un domaine D du plan $x\,;\,y$. Cette condition suppose l'existence d'un réel positif K (appelé *constante de Lipschitz*). Pour qu'une fonction à une variable $f(x)$ soit Lipschitzienne de constante K (on dit aussi K- Lipschitzienne) sur $[a\,;\,b]$, il faut et il suffit que son quotient différentiel soit bornée par K, c'est à dire

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K\, |x_1 - x_2|, \text{ pour tous } x_1, x_2 \text{ dans } [a\,;\,b].$$

Dans le cas des fonctions à deux variables, la condition de Lipschitz en y s'écrit :

$$|f(x\,;\,y_1) - f(x\,;y_2)| \leq K\, |y_1 - y_2|, \text{ pour tous } x, y_1, y_2, \text{ dans } D$$

On dit dans ce cas que la condition de Lipschitz est satisfaite par rapport à la variable y si la dérivée partielle $f'_y(x\,;y)$ existe et est bornée. Ainsi énonce t-on le théorème d'existence et d'unicité :

Supposons que la fonction $f(x, y)$ soit continue et satisfasse à une condition de Lipschitz par rapport à y dans un domaine D ; alors en tout point $(x_0\,;y_0)$ de D passe une et une seule intégrale $y = \varphi(x)$.

(Petite encyclopédie des mathématiques, p. 561.[5])

III. Conclusion

L'aperçu historique que nous venons d'esquisser permet de préciser l'importance des équations différentielles dans le développement de la science. L'histoire montre que les équations différentielles ont été, et sont encore aujourd'hui, l'un des domaines des mathématiques où apparaissent clairement leurs liens avec d'autres disciplines scientifiques. La diversité d'approches et la panoplie des méthodes de résolution qui les accompagnent, consolident la place des équations différentielles (non négligeable) dans le savoir savant, tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. Elles deviennent le lieu d'activités fondamentalement interdisciplinaires, où les concepts de modélisation et de simulation, devenus souvent incontournables (en raison du développement des outils informatiques), trouvent place et se développent au fil du temps. De nos jours, l'apparition et l'amplification des environnements informatiques permettent désormais l'accès au traitement de nombreux types d'équations différentielles suivant l'une des approches (numérique, algébrique, géométrique). Aussi, leur intégration dans l'activité scientifique vient renforcer les interactions entre les mathématiques et la physique et modifier le paysage scientifique. C'est dans ce sens que le "numérique" devient un domaine phare pour illustrer les échanges entre mathématiques et physique, comme en témoigne cet extrait du rapport 20 de l'Académie des sciences (A.S.) (2005) sur la science et la technologie :

> « Un aspect encore plus évident de l'emploi des mathématiques en physique est l'analyse numérique et le calcul. Les progrès de la physique, tant théorique qu'expérimentale, lui permettent de décrire ou de prévoir de nombreux phénomènes avec une précision considérable. Contrôler les résultats exprimés avec de nombreux chiffres significatifs (...) suppose une maîtrise de méthodes numériques avancées, recouvrant aussi bien le maniement ou la résolution algébrique des équations qui gouvernent les phénomènes en jeu que leur mise en œuvre informatique ».
> (Balian et *al.* 2005, p. 13)

En considérant la place accordée aux équations différentielles dans le savoir savant, il nous semble nécessaire de nous interroger sur la mise en œuvre de ce savoir dans l'enseignement des disciplines scientifiques. Quelle place est accordée à la modélisation et la simulation dans le traitement des équations différentielles ou inversement ? Quelle(s) approche(s) est (sont) privilégiée(s) à ce niveau d'enseignement ? Pourquoi ?

---

[5] *Petite encyclopédie des mathématiques*, p. 36. Edition K. Pagoulatos, 2ème édition. Paris – Londres – Athènes, 1986

Ce jeu de questions nous conduit à nous intéresser à quelques travaux didactiques publiés autour des équations différentielles.

CHAPITRE II : SYNTHESE DES TRAVAUX EN DIDACTIQUE SUR L'ENSEIGNEMENT DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Depuis la mise en place des nouveaux programmes du cycle terminale scientifique en mathématiques et en physique (2002), l'enseignement des équations différentielles est devenu un thème particulièrement sensible en France et source de polémique, aussi bien dans la sphère des chercheurs en didactique des mathématiques et de la physique que dans celle des enseignants du secondaire et du supérieur de ces deux disciplines. Cela se concrétise par un ensemble de réflexions, menées sur ce thème et ayant abouti à des publications variées (articles, thèses soutenues ...). Nous nous sommes proposé dans cette partie, de présenter quelques études didactiques menées récemment concernant les équations différentielles (ou sur des thèmes proches) afin d'en dégager le questionnement qu'elles permettent de poser, mais aussi, de positionner notre problématique.

I. Les relations entre les enseignements des mathématiques et de la physique

Depuis plusieurs années, la littérature sur les relations entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire et universitaire se multiplie. Diverses réflexions sont menées aussi bien en mathématiques qu'en physique; elles sont de nature épistémologique et/ou didactique (Munier et *al.* 2007, Bâ 2007, Mizony 2006, Rogalski 2006, Malafosse 1999, ...). Nous ne nous limitons qu'aux travaux concernant l'enseignement secondaire qui sont en relation avec l'enseignement des équations différentielles.

Néanmoins, s'agissant de l'enseignement universitaire, nous rappelons très rapidement (il n'est pas question de le développer ici), un exemple d'étude sur la notion de différentielle (Artigue 1982 ; Frechet 1911). Ces travaux mettent en évidence certains points de conflit entre les deux disciplines, relativement au statut accordé à cette notion : en physique la différentielle apparaît comme étant essentiellement le petit accroissement d'une grandeur (un scalaire), et en mathématiques comme une application linéaire (fonction), comme le résument Artigue et *al.* (1986) :

> « Les physiciens étaient attachés à leur conception scalaire de la différentielle, jugeait inutilement lourdes et peu opératoires les notions, notations et méthodes préconisées par les mathématiciens ; enfin ils estimaient qu'il n y a pas là au fond de vrai problème didactique : les étudiants avaient peut-être des difficultés au début de l'apprentissage de cette notion mais, la familiarité venant, tout finissait par s'arranger. Leur position dans l'échelle exact/approché les affectaient peu puisque les méthodes qu'ils utilisaient étaient efficaces et solides : ils en avaient la preuve pragmatique
>
> Les mathématiciens, en sens inverse, étaient sûrs de leur bon droit et tout aussi attachés à leur statut de la différentielle comme application linéaire tangente. Les réticences manifestées par les physiciens par les physiciens leur apparaissaient comme les survivances d'un lointain archaïsme. Un bon objet : l'application linéaire tangente, des notations précises et non ambiguës, des méthodes explicites et rigoureuses dans le cadre fonctionnel devaient lever l'essentiel des problèmes d'enseignement ». (Artigue et *al.* 1986, p. 271).

La notion de différentielle est présentée, par un groupe de chercheurs en didactique des mathématiques et de physique (Alibert et *al.* 1987), comme étant l'une des notions principales pour développer les liens entre l'enseignement et la recherche entre les mathématiques et la physique. La recherche menée par ce groupe montre qu'une collaboration entre spécialistes des deux disciplines est possible, à condition que l'approche interdisciplinaire envisagée n'aboutisse pas à une "interdisciplinarité séparée" :

> « Elle [*l'interdisciplinarité séparée*] aboutit à la création de deux nouvelles disciplines, les "mathématiques du physicien", la "physique du mathématicien". Les rappels et compléments de mathématiques des manuels de physique, dont il a été précédemment question, constituent une manifestation typique de la première. Quant à la physique du professeur de mathématiques, elle se réduit souvent à une introduction de type culturel ou historique et à l'étude rapide de quelques exemples, une fois la représentation de la théorie achevée ». (Alibert et *al.* 1986, p. 21)

Parmi les travaux menés concernant l'enseignement secondaire, on peut noter ceux qui mettent en avant un travail collectif réalisé par des professeurs de mathématiques et de sciences physiques à propos des contenus et compétences communs et sous-jacents à ces deux disciplines : (Glaser 1998), (Remy et *al.* 2004), (Hayma et *al.* 2006), (Quelen 2006), etc..

L'enseignement de notions comme la dérivée, les équations différentielles, les vecteurs, etc. devient une préoccupation des enseignants et chercheurs des deux disciplines.

II. La modélisation et les équations différentielles en terminale S

La modélisation est devenue un mot-clé des programmes de mathématiques publiés depuis 1994. Ces programmes visent à montrer les interactions des mathématiques avec les autres disciplines (la physique notamment), mais aussi l'intérêt et la puissance des mathématiques au service d'autres domaines. Mais l'activité même de modélisation, comportant notamment la traduction mathématique de propriétés d'un système, soulève de nombreuses difficultés dans l'enseignement.

Dans sa thèse, Rodriguez (2007) considère que la démarche de modélisation qui apparait dans l'enseignement scolaire comme étant le reflet des pratiques des scientifiques sur la modélisation (modélisation des experts). Elle analyse les démarches et les difficultés des élèves dans le processus de modélisation. Mais avant, elle montre que dans les manuels scolaires, les situations de modélisations qui sont traitées sont réduites par rapport à ce qui se fait dans le domaine savant. Les étapes concernant le domaine réel n'apparaissent pas. Elle remarque, que dans les manuels de mathématiques, les types de tâches qui sont proposés relèvent pour la plupart du domaine des mathématiques.

> « La démarche de modélisation existante en classe de mathématiques semble être une démarche transposée car elle diffère de notre schéma [6]du processus de modélisation proposé (...). On ne part pas du domaine réel, l'étape de la situation réelle est donc toujours placée dans le domaine pseudo-concret car l'énoncé de l'exercice est déjà un modèle pseudo-concret. L'étape de généralisation et prévision est absente dans les exercices analysés... »
> (Rodriguez 2007 p. 119)

Dans les manuels de physique, la situation est presque similaire :

> « ... ce qui est mis en place dans l'enseignement pour la classe de physique est aussi une partie de la démarche de modélisation car il y a des étapes qui ne sont proposées aux pour travailler ». (ibid. p. 227)

Par ailleurs, d'autres travaux ont montré que, dans les faits notamment chez les professeurs de mathématiques, les difficultés ne manquent pas quant à la gestion et à la mise en œuvre de certaines situations de modélisation.

[6] A partir du schéma de modélisation, Rodriguez décrit la démarche de modélisation du chercheur en 8 étapes.

Dans son article intitulé "Modélisation des équations différentielles en terminale S : utilisation d'un modèle praxéologique pour poser des questions didactiques", R. Noirfalise (2004) s'est interrogé sur le refus par des enseignants de mathématiques d'un exercice reposant sur la modélisation d'une situation conduisant à une équation différentielle.

> La plupart des produits pharmaceutiques, comme la pénicilline par exemple, s'élime du sang à une vitesse proportionnelle à la quantité de produit y rémanente dans le sang (c'est à dire la quantité de produit présent dans le sang à l'instant t). Le coefficient de proportionnalité est une constante strictement positive, caractéristique du produit administré.
> 1) ° Le produit est donné au patient en une seule dose y_0 en milligrammes.
> On note y = f (t) la quantité de produit rémanente dans le sang en fonction du temps t, exprimé en secondes.
> a) déterminer la fonction f ;
> b) le produit a une demi vie de 2 heures. Déterminer la constante k.
> 2)° ...

Selon lui, certains enseignants pensent que ce problème ne peut être donné à l'épreuve de mathématiques du baccalauréat car il soulève une difficulté : celle de la compréhension des termes « *la vitesse d'élimination du produit* », donc de la traduction de la phrase « *le produit s'élimine à une vitesse proportionnelle à la quantité y rémanente dans le sang* » en l'équation différentielle « - $y' = ky$ ». Noirfalise a montré à travers cet exemple que la modélisation n'est pas prise en charge par l'enseignant de mathématiques. Il suppose que « la technique consistant à traduire *vitesse proportionnelle à la quantité y rémanente* en « $-y' = ky$ » ne fait pas partie des pratiques habituelles de la classe de mathématiques :

> « Cette technique n'est pas assumée en classe de mathématiques car le discours technologique permettant de la justifier n'est pas mathématiquement orthodoxe ».
> (Noirfalise 2004, p. 9)

En considérant ce type de situation, ce déficit technologique peut faire des mathématiques un obstacle pour l'entraînement à une pratique de modélisation dont l'essentiel du travail conduit normalement à la mise en équation différentielle (MED) ; ce qui n'est pas facile. On peut bien s'interroger sur les contraintes qui pèsent sur l'apprentissage des procédures relatives à la MED (que nous pouvons considérer comme l'une des composantes essentielles d'une modélisation des phénomènes physiques, continus en fonction du temps).

A ce propos, Rogalski (2006) a analysé la question de la mise en équation différentielle (MED) des phénomènes physiques étudiés dans l'enseignement des mathématiques au lycée et à l'université en distinguant deux types de procédures : la "procédure mathématique de l'accroissement différentiel (PMAD)" et la "procédure physique d'accroissement différentiel (PPAD)".

> « La "procédure physique d'accroissement différentiel (PPAD)" consiste à essayer d'évaluer Δf quand on accroît x de Δx, en admettant que le terme du premier ordre en Δx donné par un raisonnement physique est correct … Certes la PPAD permet souvent de découvrir des lois physiques par la MED. Mais elle demande l'apprentissage d'un "métier de physicien modélisateur" qui s'appuie sur une bonne technique du calcul différentiel, et demande une intuition physique pour sentir ce qui, dans une mise en équation, peut être négligé. (…)
> Dans la PMAD, l'accent est mis sur les moyens de mettre en évidence le caractère négligeable devant Δx de l'erreur absolue commise, ou au moins de prouver que le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ a bien la limite espérée quand Δx tend vers zéro».
> (Rogalski 2006, p. 5)

Cependant, l'apprentissage de ces deux procédures impose une maîtrise de certaines notions d'Analyse comme l'approximation (locale ou globale), la majoration et l'encadrement, la négligeabilité (liens avec la dérivabilité et la notion d'erreur relative dans une procédure différentielle). Mais ces notions sont très marginales dans les programmes de mathématiques du lycée. Dans la pratique, la PPAD n'apparaît généralement qu'à partir de la deuxième année d'université. D'où l'intérêt et la nécessité, selon Rogalski, de développer d'abord la PMAD afin de pouvoir d'une part, faire de façon profitable de la physique en classe de mathématiques et de l'autre (donc inversement), permettre la construction des savoirs et des habilités mathématiques à travers la confrontation avec la physique. Dès le lycée, ajoute l'auteur, certaines situations peuvent faire l'objet d'un entrainement à la PMAD. Il présente en exemple une situation sur la dissolution d'une solution saline :

Un bassin contient 100 litres d'eau, dans lesquels sont dissous 10 kg de sel. Une arrivée d'eau pure, avec un débit de 10 litres/mn, démarre à l'instant 0. En même temps que l'arrivée d'eau pure, une évacuation du mélange contenu dans le bassin est assurée avec un débit de 10 litres/mn. L'homogénéisation du contenu du bassin est assurée de façon permanente et instantanée par un mélangeur. Au bout d'une heure, quelle quantité de sel reste t il dans le bassin ?

Selon Rogalski, cette situation qui nécessite d'être soigneusement étudiée (sous forme d'ingénierie didactique), présente un double intérêt. Elle permet de travailler à la fois sur la PMAD et sur la discrétisation "d'une méthode d'Euler physique".

Le lien entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement pose alors la question de la part qui revient à chaque discipline à propos de la modélisation des phénomènes physiques.

Pour sa part, A. Saglam (2004) a étudié, dans sa thèse intitulée « *Les équations différentielles en mathématiques et en physique* », les conditions d'un apprentissage, par les étudiants de première année de l'université, du concept d'équation différentielle en mathématiques et en physique.

Elle a cherché à caractériser le statut des équations différentielles dans les programmes et les manuels des classes de terminale S. Les programmes et manuels analysés sont ceux de 1998 en mathématiques et ceux de 1996 en physique. L'auteur fait remarquer que dans chacune des deux disciplines, les équations différentielles revêtent deux statuts différents : "Objet mathématique" en mathématiques et "modèle" en physique. En effet, en mathématiques, les équations différentielles sont considérées comme un objet d'étude, en ce sens où l'apprenant est amené à travailler sur les propriétés mathématiques de cet objet. Ce travail débouche ensuite vers la résolution des problèmes. Par contre, en physique, les équations différentielles sont considérées comme "modèle" pour décrire les phénomènes étudiés, expliquer leurs relations et prévoir leur évolution. En tant que modèle, les équations différentielles se prêtent bien au processus de modélisation[7]- au sens de Chevallard (1989) - des phénomènes physiques.

Cette caractérisation a conduit Saglam à identifier deux types de modélisations, à propos des équations différentielles, dans les manuels de mathématiques et de physique correspondant à l'année 1998 :

La *modélisation passive* est celle où le modèle est fourni dans la situation étudiée. La modélisation a été déjà effectuée. L'exemple cité pour illustrer cette "passivité", est pris dans un manuel d'université :

[7] Chevallard (1989) définit trois étapes pour caractériser le processus de modélisation
La première étape est la définition du système. (...)
La deuxième étape est la construction ou la formalisation du modèle et le travail dans le modèle construit. (...)
La troisième étape consiste à revenir au problème pour traduire les résultats obtenus en leur donnant du sens et en les validant dans la situation réelle en fonction des réponses apportées aux questions initiales. (...)

Un circuit se compose d'un condensateur de capacité C et d'une résistance R en série, alimentés par une force électromotrice V.

a) Si q est la charge emmagasinée par le condensateur, q(t) vérifie :

$$\frac{dq}{dt} + RCdt = V$$

Calculer q(t) sachant que la charge initiale du condensateur est nulle et V constante.

b) Pour le même circuit, on s'intéresse au courant i(t). Il vérifie :

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dV}{dt}$$

calculer $i(t)$ sachant qu'à l'instant 0 le courant est I_0 et que $V(t) = V_0 \sin \omega t$

La modélisation active est celle où le modèle est à construire. La situation à étudier est décrite de façon à fournir des informations pour le choix des variables qui se rapportent aux grandeurs considérées, puis une relation entre ces relations et ces variables doit être établie. L'exemple suivant est celui proposé par Saglam dans sa thèse pour illustrer la modélisation active.

Soit $h = y(t)$ la trajectoire d'un objet lancé sans vitesse initiale v_0 depuis le haut de la tour Eiffel dont la hauteur est estimée à 300 m. (Le frottement de l'air est négligé). Calculer la hauteur de l'objet au moment $t = 4s$?

A partir d'une analyse des manuels des mathématiques, Saglam constate que l'enseignement des mathématiques privilégie une approche algébrique pour le traitement des équations différentielles. Les types de tâches extra-mathématiques qui sont proposées sur les équations différentielles consistent en une application de formules algébriques. Elle ne prend pas en charge les tâches liées au processus de modélisation et ne favorise pas le passage à la modélisation des situations physiques.

Par contre, dans l'enseignement de la physique, le processus de modélisation privilégie la construction du modèle et la recherche du modèle "équation différentielle" qui repose quasi-exclusivement sur l'application des lois de la physique (deuxième loi de Newton relative à l'accélération pour la mécanique, loi des condensateurs, loi d'Ohm, etc. pour l'électrocinétique).

III. Mise en œuvre de la flexibilité cognitive

Le concept de flexibilité cognitive (ou de pensée flexible) est emprunté à Tall (1991) et Dreyfus (1996). Il traduit le fait de voir fonctionner une connaissance (mathématique) dans différents environnements conceptuels, de reconnaître ou d'associer différents registres de représentation. Cette notion de « pensée flexible » rejoint les niveaux de fonctionnement d'une connaissance d'A. Robert (1998) : technique, mobilisable et disponible. La flexibilité cognitive, selon Robert, est sous-tendue par la disponibilité des connaissances.

Dans le même contexte, Moreno (2006) a montré dans sa thèse les difficultés rencontrées par les étudiants de CAPES pour établir des liens inter-registres ou inter-cadres sur les équations différentielles. Moreno a proposé un questionnaire où il cherche à étudier les capacités des étudiants à mettre en œuvre spontanément des connaissances élémentaires des cadres des fonctions et de l'analyse, pour effectuer des passages entre registres de représentation. Il constate que :

> • la presque totalité des étudiants (52 sur 56) n'a pas été capable d'établir un lien du registre graphique vers le registre symbolique, dans le cas de l'association d'une équation différentielle au champ de vecteurs parallèles donné. Cela atteste que des connaissances comme celles permettant d'interpréter la pente des vecteurs en termes de dérivée (connaissances C6), ne sont pas disponibles chez ces étudiants ;
>
> • la presque totalité des étudiants (51 sur 56) n'arrive pas à déduire la valeur numérique de y' à partir de $y'=f(x,y)$ lorsqu'une valeur numérique de $f(x,y)$ est donnée (sans que l'expression symbolique $f(x,y)$ soit donnée) pour tracer un dessin local d'une courbe solution. Des connaissances sur le sens de variation d'une fonction à partir du signe de la dérivée (connaissances C5) ne sont pas disponibles chez ces étudiants ;
>
> • la presque totalité des étudiants (52 sur 56) a été incapable de décrire localement, à partir de l'expression explicite d'une équation différentielle, le comportement d'une courbe solution en un point de coordonnées données et d'approcher l'ordonnée d'un point de cette courbe. Ils ne sont même pas arrivés à évaluer, en ce point donné, l'expression symbolique de l'équation différentielle.
> (Moreno 2006, p. 122)

Dans la même optique, nous avons mené à l'occasion de notre mémoire de DEA (2002), dont le but était de cerner les démarches (procédures) entreprises par les élèves de terminale S ainsi que leurs modes de validation, dans des situations intra-mathématiques qui demandent à établir une correspondance entre trois objets mathématiques : équations différentielles, fonctions, courbes. Les trois activités proposées sont réparties de la manière suivante :

- Correspondance ente des équations différentielles et des courbes (activité 1)

- Correspondance entre une fonction et une équation différentielle (activité 2)
- Correspondance entre une équation différentielle, une fonction et une équation différentielle (activité 3).

Une hypothèse de travail qui a fondé notre travail en DEA est de considérer « qu'un enseignement basé sur une approche croisée entre mathématiques et physique peut favoriser la conceptualisation des notions mises en jeu. Ainsi, nous estimons que, si le concept d'équation différentielle apparaît comme un outil et/ou un objet nécessaire et efficace dans la résolution de certains problèmes (intra- et extra-mathématiques), alors il permettrait la construction d'un cadre personnel de rationalité (des élèves) commun aux deux disciplines. En absence d'un tel cadre personnel, l'élève se trouve empêché d'utiliser les connaissances acquises en physique dans des activités de résolution des équations différentielles en mathématiques. Les mathématiques peuvent être un obstacle à la flexibilité cognitive ».

Nous avons proposé trois activités aux élèves de terminale S d'un lycée de Grenoble. Nous nous proposons de montrer ci-dessous un extrait de cette expérimentation. Il s'agit de la troisième activité.

Enoncé

Soit f une fonction solution d'une équation différentielle, de courbe représentative (Γ).

(Γ) est une sinusoïde.

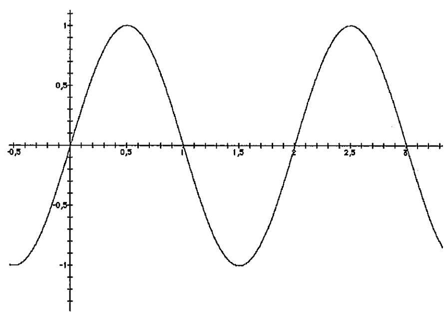


Fig. 1

- À partir de la figure 1, déterminer sans chercher l'expression de la fonction f, l'équation différentielle (E) dont f est une solution.
- Préciser les conditions initiales permettant d'établir la fonction f
- Préciser l'expression de la fonction f, sans résoudre l'équation différentielle (E) obtenue à la première question.

D'une manière générale, nous avons constaté que les « stratégies physiques [8]» sont apparues rarement et sans être approfondies, même quand les « stratégies mathématiques » s'avéraient inefficaces. Les connaissances acquises au cours de physique sur les équations différentielles ne semblent pas être disponibles chez les élèves pour traiter des situations données en mathématiques. Ceci nous conduit à considérer qu'il y un "décalage" entre les équations différentielles enseignées en mathématiques et celles enseignées en physique dans les classes de terminale S. On pouvait s'y attendre car les élèves ne sont pas entrainés à accomplir des types de tâches où ils doivent passer d'un cadre de rationalité à un autre, c'est-à-dire du cadre des mathématiques au cadre de la physique ou inversement.

IV. Conclusion

Les travaux que nous avons présentés montrent que le travail sur la modélisation dans l'enseignement des équations différentielles depuis les programmes des années 90, ne va pas sans difficultés. Il ressort aussi que le contenu des programmes de mathématiques actuels laisse peu de place à une étude de certains éléments de l'analyse (majoration, encadrement, négligeabilité ...) qui pourraient sans doute contribuer à l'évolution des rapports entre les mathématiques et les autres sciences.

Si les équations différentielles sont retenues comme l'un des lieux de développement des rapports entre mathématiques et physique, quelle est la pertinence des activités choisies dans les manuels des deux disciplines ? Quelle est la part de chaque discipline dans la construction de la démarche de modélisation ? Quel est le point de vue des enseignants eux-mêmes sur la place des équations différentielles dans les nouveaux programmes de mathématiques et de physique ?

Ce jeu de questions générales permet de faire la transition avec le chapitre suivant, qui précise la problématique de notre étude et les cadres théoriques convoqués.

[8] Il s'agit des stratégies qui s'appuient sur les connaissances développées dans le cours de physique pour « stratégie physique », et dans le cours des mathématiques pour « stratégie mathématique »

CHAPITRE III :
PROBLEMATIQUE ET CADRES THEORIQUES

I. Problématique

I.1. Le nouveau programme de mathématiques de terminale S

Le nouveau programme de mathématiques, publié en 2001 et mis en application en 2001-2002, est très novateur mais aussi source de polémiques. Il apparaît avec des horaires réduits pour l'enseignement des équations différentielles (4,5h de cours de mathématiques et 1h de TD dans l'enseignement obligatoire) et avec des contenus nouveaux, jamais encore enseignés dans le secondaire, comme la méthode d'Euler.

I.1.1. Changement d'optique

Ce programme marque aussi une évolution de l'enseignement des équations différentielles. Il considère d'abord les équations différentielles comme un outil pour introduire la fonction exponentielle (en s'appuyant sur quelques phénomènes physiques comme la radioactivité), et ensuite seulement comme un objet mathématique qu'on étudie : l'aspect outil[9] précède donc celui d'objet (Douady 1986). Ce nouvel objet mathématique, introduit à propos d'un phénomène physique particulier va pouvoir servir pour étudier d'autres phénomènes physiques (comme la charge ou la décharge d'un condensateur).

En plus, la méthode de résolution algébrique n'est plus la seule retenue pour l'introduction de cette notion (fonction exponentielle). On y associe une méthode numérique (méthode d'Euler) dont la mise en œuvre effective nécessite le recours aux outils informatisés.

[9] « Par outil nous entendons son fonctionnement dans les divers problèmes qu'il permet de résoudre. Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement ». (Douady 1986, p. 9)

I.1.2. Interdisciplinarité, Transdisciplinarité, pluridisciplinarité, etc.

Ces notions caractérisent des travaux qui concernent plusieurs disciplines. Elles présentent de fortes similarités mais aussi des différences. Notre but n'est pas de présenter ici chacune de ces notions sur lesquelles la littérature abonde (Blanchard-Laville 2000, Rumelhard 2000, Chevel 1998, Morin 1990, Fourez 1988, etc.). Nous rappelons simplement ces notions afin de mieux situer les caractéristiques des relations entre les mathématiques et la physique dans les programmes scolaires sur l'enseignement des équations différentielles.

Selon les concepteurs des programmes actuels de mathématiques et de sciences physiques, l'enseignement des équations différentielles doit être pris en charge désormais par les enseignants des deux disciplines. Mais quelles sont les limites de chaque discipline ? Parlerait-on, dans ce cas précis, d'interdisciplinarité, de transdisciplinarité, de pluridisciplinarité, de polyvalence etc. Tout ce lexique présente à la fois un intérêt dans la pratique scolaire et une ambiguïté dans sa mise en œuvre. L'ambiguïté vient de la notion même de discipline qui est loin d'être univoque. Pour Baillat et *al.* (1999), la notion de discipline présente au minimum deux « malentendus » :

> « - Le premier a trait au quiproquo induit par les usages différents que font les enseignants de cette notion : la discipline comme cadre des études et des recherches scientifiques (la géographie universitaire par exemple) et la discipline (scolaire) comme cadre structurant de la scolarité (la géographie scolaire)
>
> - Le second est plus spécifique à l'univers de la formation du monde enseignant qui fait intervenir non seulement les spécialistes des disciplines scolaires (mathématiques, EPS, sciences) mais aussi des spécialistes des disciplines contributives à cette formation ; la psychologie, la sociologie, les sciences de l'éducation ». (Baillat et *al.* 1999, p. 23).

Lorsqu'on se réfère aux programmes et aux documents d'accompagnement de ces programmes, les notions d'inter-, trans- ou pluri- disciplinarité sont souvent évoquées sans que l'on soit vraiment assuré d'une différence de signification à apporter à ces expressions.

I.1.3. Équation différentielle : Un objet "interdidactique"

Il ressort des commentaires du programme actuel des mathématiques de la classe de terminale S que les enseignants de mathématiques et de sciences physiques devraient travailler en collaboration pour faire vivre l'objet « équation différentielle ». D'ailleurs le souhait de faire vivre dès le lycée, les interfaces entre les mathématiques et les autres domaines scientifiques est partagé par de nombreux acteurs de l'enseignement (enseignants ou chercheurs). C'est dans cette optique que l'on peut comprendre l'affirmation de Parzysz (2006) :

> Les interfaces entre les mathématiques et les autres domaines scientifiques gagneraient également à être mises en évidence dès le niveau du lycée, et pour les raisons évoquées plus haut : assurer une meilleure visibilité des mathématiques et en montrer l'intérêt pour la compréhension des avancées scientifiques et technologiques.
> (Parzysz 2006, p. 301)

L'auteur cite les équations différentielles comme une des interfaces qui existe entre les mathématiques et la physique, dont la mise en œuvre en terminale S ne va pas sans difficultés.

Notre étude repose sur l'hypothèse que la mise en relation des disciplines (mathématiques et physique) ne relève ni d'une transdisciplinarité (car chaque discipline conserve sa spécificité et son indépendance), ni d'une pluridisciplinarité (dont on sait la difficile mise en pratique) mais d'une « continuité didactique » : plus modeste, ceci caractérise bien à notre sens l'objectif de mise en relation, au niveau scolaire, des disciplines scientifiques : chacune garde sa spécificité, mais des liens concrets sont établis.

Nous parlerons de ***continuité didactique*** pour traduire l'idée d'une vision plurielle mais cohérente entre l'enseignement des mathématiques et celui de la physique, conduisant les enseignants des deux disciplines à mener leurs projets d'enseignement de façon collaborative et complémentaire. C'est dans ce sens que nous appelons ***objet interdidactique*** tout savoir dont l'apprentissage se fait à travers la mise en œuvre de situations issues de plusieurs disciplines.

La continuité didactique entre les mathématiques et la physique prônée par les nouveaux programmes autour des équations différentielles peut être inscrite dans une vision de pratique interdisciplinaire, privilégiée de façon générale dans l'enseignement et considérée comme un facteur favorable à la conceptualisation. Dans le cas présent, l'enseignement des équations différentielles va être pris en charge à la fois par les enseignements de mathématiques et de physique.

Nous supposons que ce jeu d'allers-retours entre les deux disciplines, non seulement contribue à l'acquisition des connaissances et des méthodes par les élèves, mais aussi aide à la compréhension de cette notion et à la mise en valeur de l'interaction entre mathématiques et physique. Cependant, la concrétisation d'un tel projet, tant dans l'élaboration des manuels scolaires que dans les pratiques des enseignants, toutes deux soumises à des contraintes fortes, n'est pas immédiate.

La problématique de cette étude concerne le changement d'optique constaté à propos du traitement des équations différentielles en mathématiques et la viabilité de la synergie entre les mathématiques et la physique à leur sujet, dans la classe de terminale scientifique. Nous faisons l'hypothèse que les raisons d'être de ce changement d'optique, qui est bien réel, sont à rechercher à la fois dans l'évolution de l'enseignement de la physique et dans le développement des nouvelles technologies. Ce renversement a beaucoup de mal à vivre dans la classe de terminale S et nous pensons que sa viabilité impose de modifier certaines contraintes d'ordre institutionnel, matériel ou didactique.

Penser l'enseignement d'un objet de savoir en termes de continuité didactique nous conduit à nous interroger sur la complexité de son traitement, notamment sur la visibilité de cette continuité didactique dans les instructions officielles (programmes, manuels, textes d'accompagnement des programmes...), sur la démarche de validation des situations permettant l'introduction ou le traitement de cet objet dans chaque discipline et sur la perception qu'en ont les enseignants.

Nous nous posons alors un certains nombre de questions :

Quelle est la place de l'enseignement des mathématiques dans le cours de physique et inversement ?

Comment la relation mathématiques-physique est-elle mise en œuvre dans les ouvrages de chacune des disciplines ?

En quoi l'utilisation des environnements informatisés contribue-t-elle à l'amélioration des interactions entre mathématiques et physique ?

Comment les enseignants perçoivent-ils les intentions didactiques des programmes sur l'enseignement des équations différentielles ? Et comment les mettent-ils en œuvre ?

Comment une articulation entre ces disciplines pourrait-elle se concrétiser dans les sujets de baccalauréat ?

Les sujets d'examen (baccalauréat série S)

A propos des sujets de baccalauréat français, nous rappelons que l'épreuve de mathématique de la session de juin 2003 a défrayé la chronique, un an après la mise en application des nouveaux programmes. Les réactions se sont multipliées autour du sujet qui a été proposé dans le lequel le problème portait sur une équation différentielle non linéaire. On peut bien noter celle du bureau national de l'APMEP[10] qui considère que ce sujet est en rupture avec ceux des sessions précédentes et ne traduit pas "l'esprit" d'un examen national tel que défendu par l'association. Un certain nombre de questions ont été posées :

> « Les sujets, ayant pourtant passé toute une série de garde-fous prévus par l'institution (voir à ce propos le site du ministère de l'Eduction Nationale) seraient-ils inadéquats ? Ce sujet a-t-il fait l'objet de toutes les précautions habituelles ? Pourquoi évaluer les élèves sur une telle équation différentielle ? Etc. » [Réaction du bureau national de l'APMEP[11]]

Cependant, de toutes les réactions que nous avons pu évoquer autour du sujet de baccalauréat 2003, aucune ne met en cause un enseignement des équations différentielles en mathématiques qui s'appuie sur des situations de modélisation (issues des sciences expérimentales). On peut donc se poser la question si les équations différentielles, telles qu'elles sont enseignées actuellement en mathématiques, peuvent faire l'objet d'une évaluation au baccalauréat sur des situations nécessitant une mise en équation différentielle ?

II. Cadres théoriques :

II.1. La théorie anthropologique des savoirs

II.1.1. L'approche écologique des savoirs

Pour analyser l'évolution diachronique de l'enseignement des équations différentielles et les raisons de leur viabilité (raison d'être), nous nous plaçons dans le cadre théorique de l'écologie des savoirs développé par Chevallard (1994). Les deux notions principales auxquelles nous ferons appel sont celles de « besoins trophiques » et « d'habitat ».

L'habitat est caractérisé par les lieux de vie et l'environnement conceptuel de cet objet. Selon Rajonson (1988 p. 135), « c'est l'adresse de l'être mathématique considéré ».

Un point fondamental dans cette approche écologique est, en effet, le fait de considérer qu'un objet de savoir ne peut vivre de manière isolée. Il est toujours en interrelation avec d'autres objets de savoir. Dans cette optique, Rajonson (ibid.) développe l'idée de la loi du « tout structuré » : la viabilité d'un objet de savoir dépendant d'autres objets sans lesquels ce savoir n'a pas de raison d'être. En se servant des éléments de l'écologie des êtres vivants, M. Artaud

---

[10] APMEP (Association des Professeurs des Mathématiques de l'Enseignement Secondaire)

[11] Lettre n°1 de Jean Paul Bardoulat au Ministre de l'Education Nationale (21 Juin 2003) : http://www.apmep-aix-mrs.org/institution/bacS.html

introduit la notion de « besoin trophique » en didactique des mathématiques pour désigner les objets - mathématiques ou non - qui permettent la vie ou la survie d'un objet de savoir :

> « En ce qui concerne les objets mathématiques, il s'agit semblablement d'objets dont un objet mathématique donné a besoin pour vivre dans un écosystème considéré ».
> (Artaud 1997, p. 112)

Cette notion de besoin trophique d'un objet de savoir, ajoute Artaud, est liée en écologie à celle de « chaîne » ou « liaison trophique » c'est à dire un réseau formé par les objets qui conditionnent la viabilité de cet objet.

Pour caractériser la place occupée par les équations différentielles, nous considérons la notion d'habitat relatif à un objet de savoir au sens de Rajonson (1988, p.135), Artaud (1997 p. 111) c'est-à-dire les différents lieux où l'on pourra trouver un objet mathématique et les différents objets avec lesquels il entre en interaction. Nous pourrions y ajouter l'espace des problèmes dans lequel cet objet apparaît.

I.1.2. Une approche praxéologique

Y. Chevallard (1996) a proposé en didactique des mathématiques un modèle permettant d'analyser une action humaine. Il appelle ce modèle une praxéologie ou organisation praxéologique. Il est basé sur un ensemble de quatre éléments :

un type de **Tâches T**, associées à des **Techniques τ** (manière de faire) pour accomplir ce type de tâches. Les techniques sont justifiées par une **Technologie θ** (discours sur la technique), qui elle-même est justifiable par une **Théorie Θ.**

Selon Bosch et *al.* :

> « La distinction entre technique/technologie/théorie est fonctionnelle et doit toujours être référée au type de tâches que l'on prend comme point de référence ».
> (Bosch et *al.* 1999 p. 7).

Ce modèle permet d'organiser les savoirs en deux blocs :

Le bloc de la praxis (pratique) ou bloc pratico-technique[T/τ] : ce bloc est celui des savoir-faire.

Le bloc du logos (raison, discours raisonné) ou bloc technico-théorique [θ/Θ] : ce bloc représente un savoir.

Par ailleurs, Chevallard (1999a p. 2) qualifie une organisation mathématique de mixte (OMM), lorsque celle-ci articule des objets mathématiques et des objets extramathématiques. Pour ce type d'organisation de savoirs, l'auteur précise que « son enseignement doit se construire dans un commerce constant avec un certain *domaine de réalité extramathématique* (DREM) »

Dans notre étude, nous empruntons à Chevallard ce concept d'organisation mathématique mixte (OMM) pour identifier les types de tâches qui apparaissent (relativement aux équations différentielles en mathématiques et en physique) et analyser leur mise en œuvre en termes de technique, technologie ou de théorie, celles-ci pouvant relever du domaine des mathématiques ou de la physique.

I.2. La dialectique outil/ objet

Compte tenu de la nature des « objets » étudiés dans chacune des disciplines, du mode de validation des problèmes traités, du statut des représentations sémiotiques, nous nous intéressons dans cette partie au caractère outil ou objet des équations différentielles dans chacune des deux disciplines. Nous pensons que la place d'un concept dans le processus de conceptualisation ou de résolution d'un problème donné, détermine son statut.

Dans notre travail, il s'agit d'analyser la place d'un objet d'enseignement qui « *vit* » à la fois dans deux disciplines différentes. L'approche interdisciplinaire entreprise pour introduire les équations différentielles peut être analysée en terme d'évolution du statut occupé par les équations différentielles dans la mise en œuvre de la synergie mathématiques /physique. C'est ainsi que nous utilisons la même terminologie que Régine Douady pour caractériser les différents statuts des équations différentielles dans les programmes successifs que nous avons analysés.

Le rôle joué par un concept dans la construction d'un savoir peut être caractérisé en terme de *statut*. Ainsi Douady (1984) distingue deux statuts : le statut d'*outil* et le statut d'*objet*.

Selon Douady,

> « Un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème [...] Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement ».
> (Douady 1986)

En mathématiques, les situations où les équations différentielles sont mises en jeu relèvent des mathématiques ou d'une étude de phénomènes physiques. Il nous semble intéressant de distinguer, suivant chacun des cas, si cette notion apparaît à un niveau explicite ou bien implicite. Ainsi, trois statuts sont possibles pour les équations différentielles : « outil explicite », « outil implicite », et « objet mathématique ».

Nous reprenons la classification faite par Douady (1984) sur le caractère implicite ou explicite d'une notion. Nous considérons que les équations différentielles revêtent un statut d'« outil implicite », lorsqu'elles permettent l'introduction d'une notion, mathématique ou non. Par exemple, dans le programme actuel de mathématiques, la fonction exponentielle est introduite à partir des équations différentielles.

Elles sont un « outil explicite » lorsqu'elles sont mises en œuvre de façon explicite dans la résolution d'un problème et dont l'usage peut être justifié.

Traiter les équations différentielles en termes d'outil ou d'objet en mathématiques et en physique nous conduit à nous intéresser à la question du fonctionnement, dans ce cas particulier, de la dialectique outil/objet. Les mathématiques sont considérées comme pourvoyeurs d'outils par les physiciens.

I.3. Cadre de rationalité et registres sémiotiques

I.3.1. Rationalité scientifique – rationalité quotidienne

De manière générale, les mathématiques et la physique sont deux disciplines très « proches » l'une de l'autre. Mais parler d'une « discipline » suppose une organisation cohérente d'objets de connaissances scientifiques et des méthodes spécifiques ou non à la discipline. Selon Edgard Morin,

> « Bien qu'englobée dans un ensemble scientifique plus vaste, une discipline tend naturellement à l'autonomie, par la délimitation de ses frontières, le langage qu'elle se constitue, les techniques qu'elle est amenée à élaborer ou à utiliser, et éventuellement par les théories qui lui sont propres ». (Morin, 1990)

Bien que de nombreux objets/outils mathématiques soient utilisés en physiques, ces deux disciplines sont loin de définir une logique organisationnelle similaire.

Nous avons ainsi parlé de « rationalité » pour caractériser les spécificités et la cohérence propres à chaque discipline. Mais le terme de rationalité revêt plusieurs acceptions ; nous l'avons utilisé ici dans le sens d'une cohérence, d'une logique dans une discipline évacuant toute contradiction dans le fonctionnement interne des objets conceptuels. Nous nous sommes appuyés ici sur les travaux menés par Legrand (1988), Lerouge (1992) et Malafosse et *al.* (2000, 2001a, 2002b). Ces auteurs s'accordent à distinguer deux types de rationalité : la rationalité scientifique (selon Legrand) ou culturelle (selon Lerouge) et la rationalité quotidienne.

Pour Legrand :

> « la rationalité scientifique est celle définie au sein d'une communauté scientifique, elle fonctionne en référence à un système de valeurs constitué de techniques de pensée, de paradigmes, de moyens de contrôle et d'intentionnalité, propres à une communauté scientifique »
>
> la rationalité quotidienne [12] est celle « qui fait référence aux systèmes de valeurs et aux techniques de pensée propres aux environnements culturels et sociaux dans lesquels nous avons grandi » (Legrand 1988).

Lerouge, quant à lui, utilise cette notion dans un contexte particulier comme nous le rappelons ci-après.

I.3.2. La notion de cadre de rationalité selon Lerouge

Le point le plus significatif dans la notion de « cadre de rationalité » chez Lerouge (2000), est le statut accordé aux objets de connaissances qui constituent ce cadre. En effet, autour de ces objets se développe une approche de la notion de cadre de rationalité qui repose sur quatre axes : le type d'objet, le type de démarche de conceptualisation, le type de démarche de validation, et enfin le statut des signifiants graphiques dans ces démarches de conceptualisation et de validation.

La notion de cadre de rationalité a été reprise par Malafosse, Lerouge et Dusseau (2001) pour désigner un ensemble cohérent du fonctionnement de la pensée caractérisé essentiellement par quatre composantes :

> « L'ensemble des objets conceptuels sur lesquels porte la conceptualisation ;
>
> - Le type de processus de validation ;
>
> - Les éléments de rationalité (règles de traitement et de validation) ;
>
> - Et enfin, les registres sémiotiques qui servent de support à la conceptualisation et à la communication ». (Malafosse et *al.* 2001)

[12] « Dans cette rationalité, les objets qui fondent le raisonnement existent déjà et n'ont pas besoin d'être formellement définis. Les règles ou le principe de validité qui fonctionnent très bien dans la rationalité culturelle ou scientifique sont inadaptés car les objets rencontrés ne sont pas idéalisés et ne peuvent rentrer par conséquent (sauf exception) dans une véritable logique du vrai/faux, oui/non, zéro ou un, etc. » (Legrand 1988)

On peut donc considérer qu'il existe un cadre de rationalité des mathématiques et un cadre de rationalité de la physique. Mais en se référant à une problématique de *continuité didactique*, l'enseignement des deux disciplines que sont les mathématiques et la physique conduit à interroger la manière dont les activités de modélisation doivent se traiter.

On suppose que, dans le traitement des situations de modélisation, les règles de validation interviennent à plusieurs niveaux. Selon la nature de la tâche, ces règles varient ; par exemple, les règles qui permettent de traiter et de valider le type de tâche "déterminer l'équation différentielle qui régit le phénomène étudié" n'est sans doute pas de même nature que celle associée au type de tâche "résoudre une équation différentielle".

De plus, le niveau d'étude des élèves ne permet toujours pas de faire vivre pleinement la rationalité culturelle (scientifique) dans l'enseignement. Ainsi, les choix (didactiques, méthodologiques, épistémologiques ...) opérés, par les décideurs des programmes scolaires, sur l'enseignement de certains objets conceptuels, sont appelés à être révisés en fonction de certaines contraintes. C'est le cas par exemple des équations différentielles qui étaient étudiées dans les programmes antérieurs à 2002 avant la fonction exponentielle et qui actuellement permettent l'introduction de cette dernière. La nouvelle vision de l'enseignement de ce savoir en mathématiques nécessite la prise en compte d'autres connaissances issues de la physique et d'autres notions nouvelles (méthode d'Euler), et induit de nouvelles approches d'enseignement (introduction de la résolution numérique des équations différentielles).

Ainsi nous abordons dans le sens de Lerouge en considérant, dans le cas des équations différentielles, trois cadres de rationalité : Cadre culturel, cadre didactique et cadre personnel

I.3.3. Objets conceptuels et les cadres culturels de rationalité

Les travaux de Malafosse, Lerouge et Dusseau (2000, 2001) à propos d'une étude sur l'acquisition de la loi d'Ohm au collège, permettent de considérer trois types de cadres de rationalité :

Cadres culturels (des mathématiques ou des sciences physiques) :

> « Les cadres culturels des mathématiques et des sciences physiques ont un statut de cadre scientifique dans la mesure où leurs mondes d'objets sont constitués de concepts scientifiques et où les règles de raisonnement de validation mises en œuvre sont reconnues par une communauté scientifique ». (Malafosse et *al*, 2001, p. 65)

Ces deux cadres culturels sont différenciés par la nature des objets conceptuels sur lesquels porte l'activité cognitive des sujets et des règles de validation.

Cadres didactiques, construits dans un but de transposition des savoirs entre une communauté scientifique et l'élève en situation d'apprentissage scolaire. Nous avons qualifié ces cadres didactiques de « cadres intelligibles » car ils doivent normalement « rendre intelligible » l'accès aux équations différentielles dans la classe de terminale.

Cadre personnel des élèves. À propos du cadre personnel, l'auteur (ibid. p. 66) signale qu'il ne s'agit pas véritablement d'un cadre de rationalité car il est lieu d'expressions de rationalités différentes, voire contradictoires.

Pour Malafosse et *al.* (2001, p.73), l'intérêt de la notion de cadre de rationalité réside dans son aptitude à être étendu au cas de l'interdisciplinarité.

L'approche interdisciplinaire prônée dans les nouveaux programmes des deux disciplines sur l'enseignement des équations différentielles se caractérise par la mise en œuvre d'une synergie sur mathématiques /physique. Il nous paraît alors intéressant d'analyser la manière dont les jeux de cadres de rationalité est prise en charge et mise en œuvre dans les manuels scolaires des deux disciplines.

Dans notre travail, nous avons prévu d'interviewer des enseignants de mathématiques et de physique sur les réalités de l'enseignement des équations différentielles dans les classes de terminale scientifique et ce, en rapport avec les nouveaux programmes de ces deux disciplines. Nous pensons que cet outil théorique pourrait nous être utile pour analyser la façon dont les enseignants favoriseraient ou non, la mise en place du cadre intelligible des équations différentielles dans un contexte de continuité didactique. La notion de registre de représentation trouve bien son intérêt dans notre analyse.

I.3.4. Registres sémiotiques

R. Duval considère que l'étude des phénomènes relatifs à la connaissance impose un recours à la notion de représentation. Il distingue les *représentations sémiotiques* comme des productions constituées par des signes (énoncés écrits dans le langage naturel, figures géométriques, formules algébriques ...) des *représentations mentales,* c'est à dire « toutes celles qui permettent une vision d'objet en l'absence de tout signifiant perceptible ».

Un système sémiotique est considéré comme registre sémiotique de représentation lorsque ce système permet les trois activités cognitives suivantes (Duval 1995) :

La formation

> « La formation d'une représentation sémiotique est le recours à un (ou plusieurs) signe(s) pour actualiser la visée d'un objet ou pour se substituer à la visée de cet objet » (Duval, 1995 p. 37)

Duval appelle règles de conformité, pour la formation d'une représentation sémiotique, les règles propres au système employé, non seulement pour des raisons de communicabilité, mais pour rendre possible l'utilisation des moyens de traitement qu'offre ce système. Une représentation sémiotique ne doit pas sortir du domaine défini par les règles constituant un système sémiotique.

Le traitement

C'est :

> « la transformation d'une représentation sémiotique prise comme donnée initiale en une représentation considérée comme terminale. Un traitement est une transformation de représentation interne au registre de représentation ou à un système ». (ibid. p. 39)

Les règles d'expansion d'une représentation sont différentes des règles de conformité. Ce sont par définition, des règles dont l'application donne une représentation de même registre que la représentation de départ.

La conversion

C'est :

> « la transformation de la représentation d'un objet, d'une situation ou d'une information donnée dans un registre en une représentation de ce même objet, de cette même situation ou de la même information dans un autre registre. ... La conversion est donc une transformation externe par rapport au registre de la représentation de départ ». (ibid p. 49)

Duval considère que les règles de conversion ne sont pas les mêmes selon le sens dans lequel le changement de registre est effectué.

Le modèle de Duval s'articule autour de la relation entre un objet et ses représentations. Duval considère qu'en mathématiques, l'apprentissage se trouve au cœur d'une activité de reconnaissance d'au moins deux représentations quelconques d'un même objet. Il distingue deux catégories d'objets (Duval 2005, p. 74) :

- des objets accessibles (soit directement par une perception non instrumenté, ou en recueillant des données par le prélèvement d'échantillons, etc. soit par des instruments qui accroissent le champ de perception (télescope, microscope) ou qui permettent de recueillir des données autrement inaccessibles (spectromètres).

- des objets inaccessibles (en dehors de représentations relevant uniquement d'une activité sémiotique). C'est dans cette deuxième catégorie d'objets que Duval situe les objets mathématiques.

On peut considérer que l'activité de modélisation des phénomènes physiques conduit à mettre en œuvre ces deux catégories d'objets. De diverses représentations sont utilisées pour transformer des objets relevant soit du domaine de la physique (théorique ou expérimentale) ou des mathématiques. Pour une telle activité, nous qualifions la démarche cognitive sous-tendue de "physico-mathématique". En effet, la transformation des représentations sémiotiques (dont la conversion et le traitement sont les processus cognitifs fondamentaux) est légitimée par l'utilisation à la fois des connaissances de la physique et des mathématiques. De plus les objets mathématiques représentés ne gardent pas leur statut mathématique. C'est le cas des représentations graphiques qui font à la fois référence à la théorie de la physique (elles traduisent l'évolution temporelle d'une grandeur) et à celle des mathématiques (elles sont considérées comme des objets mathématiques : on y trace des tangentes ou calcule certaines caractéristiques).

Dans notre travail, nous avons cherché à identifier les registres mobilisés afin d'examiner les différentes articulations mises en jeu, en particulier au niveau de l'articulation expérimental-théorie.

III. Questions de recherche opérationnalisées

Nous posons la question de l'évolution temporelle, d'une part en termes d'évolution du cadre de rationalité (Lerouge) et en termes d'habitat et de niche écologiques (Chevallard). La question que nous nous posons ici peut alors s'énoncer :

Question 1

l'évolution des programmes de mathématiques que nous aurons décrite à propos des équations différentielles, se traduit-elle par une évolution significative du cadre de rationalité culturel et/ou suit-elle une logique écologique ?

Nous posons ensuite la question de la continuité didactique "mathématiques – physique" d'une part en termes de dialectique outil-objet (Douady) et plus généralement en termes d'organisation mathématique (praxéologie, Chevallard) et d'autre part en termes de registres sémiotiques (Duval). La question que nous nous posons ici est double :

Question 2

l'équation différentielle est elle simplement un objet des mathématiques et un outil pour la physique, ou bien la praxéologie se joue t-elle de façon subtile entre les deux disciplines ? Y a-t-il continuité didactique dans les concepts/méthodes/représentations entre les mathématiques et la physique ?

Cette dernière question s'envisageant au niveau des ouvrages scolaires et au niveau des pratiques pédagogiques des enseignants.

L'introduction des méthodes numériques (et informatiques) engage bien évidemment un questionnement de même type que ci-dessus, mais nous focaliserons notre attention sur deux aspects plus globaux qui nous semblent essentiels au vu de la dimension "innovation" de cette évolution :

Question 3

quel est le rôle/statut/place des méthodes numériques (dans les ouvrages, tant du point de vue cours que du point de vue exercices) ? Comment est-ce traité/vécu par les enseignants ?

En vertu de ce qui précède, notre étude s'organise autour de trois "unités d'analyse" :

- une analyse des programmes scolaires de mathématiques et de physique
- une analyse des manuels
- une enquête auprès des enseignants

Nous présentons, dans le diagramme ci-dessous, l'organisation "simplifiée" de notre étude où le premier rectangle (en haut) représente la première partie de la thèse.

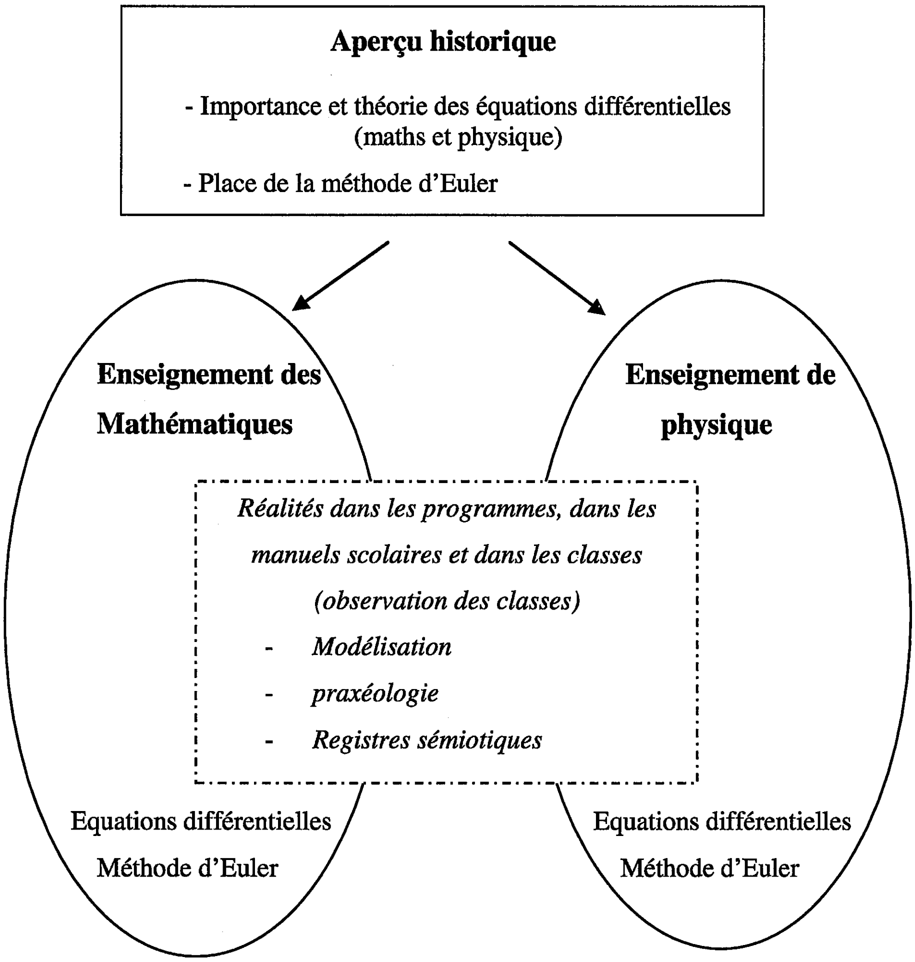


Diagramme 1 : Organisation de notre étude

Partie 2

CHAPITRE IV : ÉVOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS LES PROGRAMMES DE MATHÉMATIQUES ET DE PHYSIQUE

I. Analyse des programmes de mathématiques

Le traitement des équations différentielles dans l'enseignement des mathématiques a beaucoup évolué. Elles n'ont jamais quitté le statut "d'objet mathématique" dans tous les programmes des classes terminales de mathématiques publiés jusqu'en 1998. Cependant, leur nouveau rôle dans le programme de 2002, - introduction de la fonction exponentielle et traitement de problèmes de modélisation -, nous invite à analyser l'évolution de la place et du rôle des équations différentielles dans les programmes scolaires successifs de mathématiques. Nous touchons là à la question de la "viabilité" des équations différentielles et de leur environnement conceptuel.

Dans ce chapitre, nous présentons une étude écologique de l'évolution des programmes de mathématiques depuis les années 60 et y mettons, dans le même temps, en évidence l'évolution de la place de la physique. Nous considérons, dans cette étude, trois grandes périodes :

De 1960 à 1970 : c'est la période correspondant à l'introduction des mathématiques modernes dans l'enseignement en France,

De 1970 à 1980, c'est celle correspondant à la réforme des mathématiques modernes,

De 1980 à 1990, c'est celle correspondant à la contre-réforme des mathématiques modernes

De 1990 à 2008, c'est celle où sont privilégiées dans l'enseignement des équations différentielles des activités de modélisation.

I.1. Les anciens programmes

I.1.1. Programmes de 1960 à 1970

a) Programmes de 1960 à 1965

Place des équations différentielles.

C'est dans le programme de 1960 que les équations différentielles font leur première apparition dans l'enseignement secondaire. Quatre types d'équations différentielles sont au programme, comme nous pouvons le lire dans l'extrait du programme de 1960 de la classe de mathématiques élémentaires.

VII : Equations et Inéquations
5°) Recherche des fonctions une ou deux fois dérivables y de la variable x vérifiant les équations :
$y' = p(x)$, $y'' = p(x)$, **$p(x)$ est un polynôme en x**
$y' = ay$ **(a constante)**
$y'' + \omega^2 y = 0$ **(ω constante réelle).**
On admettra, après avoir découvert les solutions de la forme :
$A \cos \omega x + B \sin \omega x$, **que l'équation n'en admet pas d'autre**

Tableau 1 : Extrait du programme de terminale (1960)

Les concepts de continuité et de dérivabilité sont introduits en classe de première et approfondis en classe de terminale de mathématiques élémentaires. Les équations différentielles, ayant pour habitat « équations et inéquations », apparaissent comme une égalité mettant en relation une fonction et sa (ses) première(s) dérivée(s). Elles constituent un type d'équation dont la résolution consiste à rechercher une fonction une ou deux fois dérivable.

L'ordre d'apparition des équations différentielles n'est pas précisé. Il apparaît deux catégories d'équations différentielles : celles constituées par une fonction y et une de ses dérivées ($y' = ay$ et $y'' + \omega^2 y = 0$) et celles constituées d'une dérivée de y et d'une fonction polynôme $p(x)$ donnée ($y' = p(x)$ et $y'' = p(x)$).

Les trois types d'équations différentielles peuvent être catégorisés par leur type de solutions qui sont respectivement les fonctions polynômes, exponentielles et circulaires.

Mode de traitement et intérêt

Le mode de traitement de la plupart des types d'équations différentielles rencontrées à ce niveau n'est pas donné. Nous ne relevons aucune précision, ni sur la méthode de résolution, ni sur l'existence et l'unicité des solutions, sauf pour l'équation $y''+\omega^2 y=0$ (1) pour laquelle, la forme générale des solutions est précisée.

Statut de la notion "d'équation"

Les équations différentielles sont étudiées en algèbre et font partie du chapitre VII *Équations et inéquations.* Ce qui est mis en avant dans ce programme est donc qu'elles sont d'abord des "équations" (sans les qualifier). Elles ont toutefois une particularité fondamentale : les inconnues sont des fonctions.

Traiter les équations (simples) et les équations différentielles dans le même chapitre nous semble poser un problème d'ordre didactique et épistémologique : Quel est en effet alors le sens du terme "équation" ? Comment gérer les analogies et les différences entre les deux catégories ? Quel est l'espace de problèmes commun ?

Ranger dans le même chapitre les catégories d'équations étudiées dans ce programme semble indiquer que le terme "équation" a la signification d'une " égalité ", comme à l'époque médiévale (Hauchecorne, 2003, p. 66) – c'est-à-dire une égalité qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs de(s) l'inconnue(s). À propos du terme "équation", Le lionnais et *al.* (2007, p. 299) affirment qu'« employé seul, [*il*] est mathématiquement indéfinissable. Son sens dépend du contexte ou du qualificatif qui l'accompagne ».

On peut aussi considérer, comme Rogalski et *al.* (2001, p.18) qu'une équation n'est pas à proprement parler un objet "des mathématiques" comme l'est une fonction, ou un triangle, ou une intégrale, ou un groupe, mais une sorte de modalité : « On parle en effet d'équation, lorsqu'il y a une intention, de la part d'un mathématicien (élève, enseignant, chercheur, ...) de résoudre un certain type de problèmes ». Un des types de problèmes dont parle M. Rogalski associe une équation à la notion de fonction :

> « soit f : E → F une application, et y un élément de F. On dit qu'on veut résoudre l'équation ($e_{f,\,y}$), on note ($e_{f,\,y}$) : $f(x) = y$, lorsqu'on recherche un élément x de E dont l'image par f est y (on peut aussi dire qu'on recherche un antécédent x de y). On dit que x est l'inconnue, et y est donné. Un élément x de E qui répond à la question est dit une solution de l'équation. [...] une équation est donc attachée à une application f, donc à deux ensembles E et F ».

(Rogalski et *al.* 2001. p. 18)

Ainsi, résoudre dans $\Re$ l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ consiste à trouver les valeurs de x telles que l'application f : $\Re \rightarrow \Re$ définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ soit nulle. De même résoudre l'équation différentielle $y' = ay$ consiste à trouver les fonctions numériques y définies sur $\Re$ telles que l'application f : $C^1 \rightarrow C$ de l'espace des fonctions à dérivées continues dans l'espace des fonctions continues, soit égale à 0. : C'est la ***résolution algébrique*** qui est la seule retenue pour le traitement des équations différentielles.

Cependant, la mise en évidence des liens entre ces deux catégories d'équations ne suppose pas forcément la "dépendance" didactique dans la démarche qui consiste à introduire l'un ou l'autre savoir. On peut bien imaginer une étude des équations différentielles sans faire allusion aux équations et inéquations.

Dans une étude de l'évolution de l'analyse dans l'enseignement en France, Kuntzmann (1976) propose un réseau conceptuel des notions qui sont étudiées dans le programme des mathématiques de 1960. On y retrouve les équations différentielles au bout d'une chaîne de concepts laquelle la notion de "fonction numérique" se situe en amont.

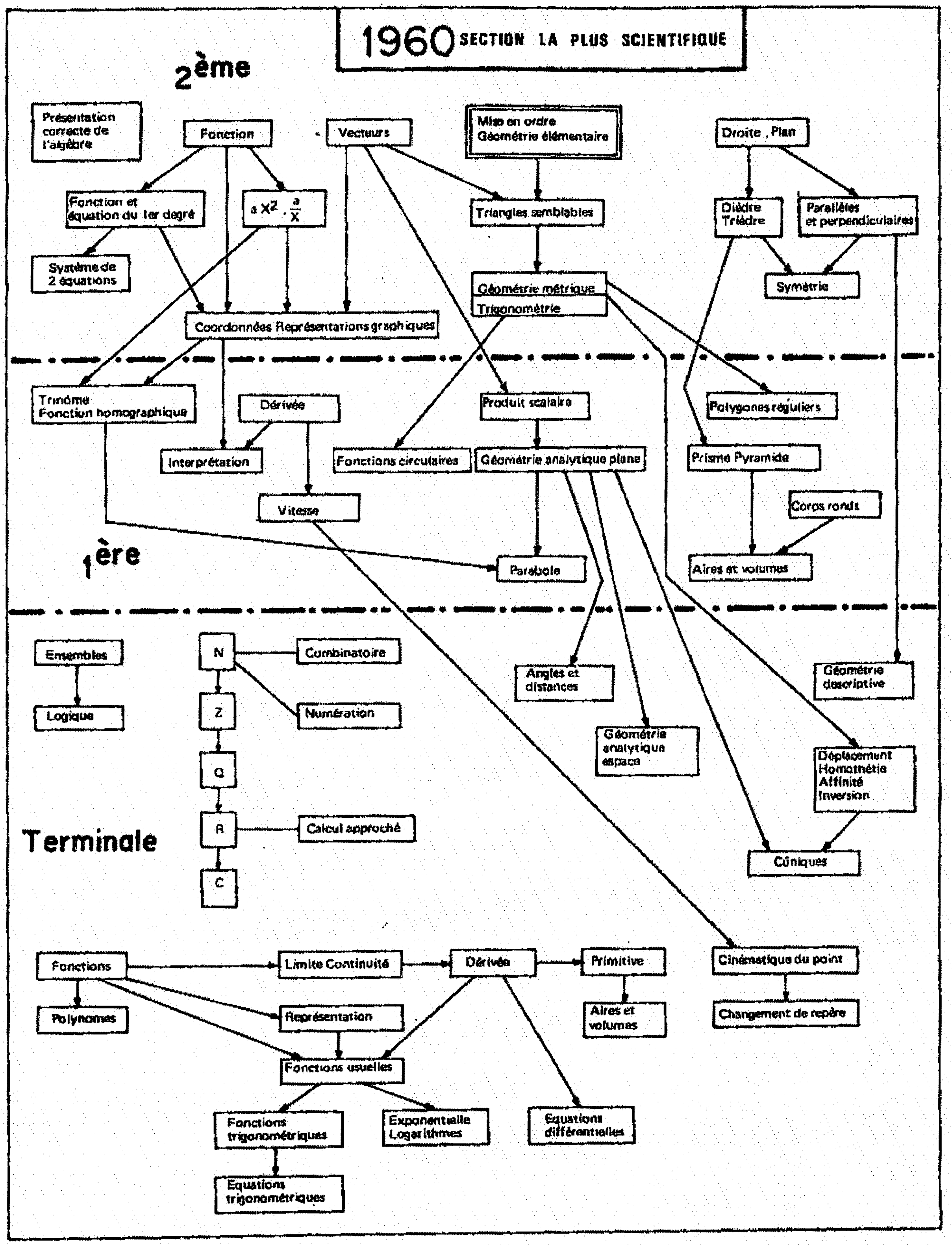


Figure 3 : réseau conceptuel caractérisant le programme de 1960

Des critiques sur la manière dont sont traitées les équations à cette époque sont formulées. En effet, dans une analyse de l'enseignement des équations dans les années 1960, Raynaud critiquait la manière dont ce concept est traité dans l'enseignement et, par conséquent, son utilisation par les élèves. Pour Raynaud, les élèves savent bien traiter les équations, mais ne savent pas ce qu'ils font.

> « Pour trop de nos apprentis, déclare t-il en parlant des élèves, résoudre une équation c'est lui associer, par un mécanisme connu, un ou plusieurs nombres appelés ses racines. La chose peut être faite sans savoir ce qu'il faut entendre en général par racines d'une équation, ni même par équation »
>
> (Raynaud 1960, p. 159)

La formule peut être appliquée au cas des équations différentielles, en remplaçant l'expression « racine réelle » (qui désigne un nombre) par l'expression « fonction dérivable ».

Enfin, notons que la relation avec la physique n'est pas évoquée.

b). Programmes de 1965 à 1970

Les programmes de 1960 connurent des aménagements en 1965. De nouvelles filières voient le jour. En terminale, les filières C, D et T succèdent à celles de mathématiques élémentaires et de sciences expérimentales. Les textes des programmes des classes terminales sont adoptés en 1966 et publiés en 1967[13]. Ces programmes restent sous l'influence du *structuralisme* et renforcent le recours aux mathématiques « modernes », qui s'étendent aux classes de première. La rubrique « notions générales » s'enrichit avec l'introduction explicite de la notion de loi de composition : loi interne, loi externe, définition des structures des groupes, d'anneau, de corps commutatif et d'espace vectoriel, notion d'isomorphisme de structures.

Dans ce programme, les équations différentielles constituent un chapitre individualisé. Cependant, en dépit de leur disparition du chapitre "Équations et inéquations", leur contenu notionnel est le même que celui des programmes précédents. Ceci suppose que leur environnement conceptuel n'a pas beaucoup changé.

Une commission ministérielle dirigée par A. Lichnerowicz, qui commence ses travaux en 1967, se charge de rédiger de nouveaux programmes dans le souci de renforcer

[13] Bulletin de l'APMEP n° 252 bis (1967) *: Les nouveaux programmes de première et Terminale de l'enseignement du second degré*. Bulletin spécial

l'enseignement des « mathématiques modernes ». La publication de ces travaux fera l'objet de la réforme dite des mathématiques modernes.

I.1.2. Programmes de 1970 à 1980

Pour les structuralistes, les mathématiques sont ainsi considérées "comme un instrument essentiel de la compréhension et de la maîtrise du monde" (Bkouche, 1996, p. 127). La philosophie structuraliste a continué de dominer l'enseignement des mathématiques. C'est en ce sens que la réforme des années 1970 s'inscrit dans l'esprit structuraliste, et met en avant les problèmes de fondements, d'axiomatique et la notion de structure.

Quelle est la place des équations différentielles dans ces nouveaux programmes publiés en 1972 ?

a). Place des équations différentielles

Par rapport aux programmes précédents, ce nouveau programme connaît une introduction d'éléments de l'analyse, qui prend son autonomie par rapport à l'algèbre. Les équations différentielles changent d'habitat ; elles apparaissent comme le couronnement des notions d'analyse :

> « Les programmes de 1969-1972[14] se proposent en trois ans, de provoquer chez les élèves un changement d'optique basé sur la conception ensembliste, de présenter les premières notions d'analyse – notions que les programmes précédents n'abordaient pas- jusqu'aux équations différentielles[15] ».
>
> (MEN, Circulaire n°71-244 du 26 juillet 1971)

Nous pouvons illustrer ce propos à partir du réseau conceptuel du programme de 1972 de la section proposée par Kuntzmann (1976) :

[14] La mise en œuvre des programmes qui commence en 1969 devait se poursuivre en première et s'achever pour les classes des terminales en 1971.

[15] Ministère de l'éducation nationale. Circulaire n°71-244 du 26 juillet 1971

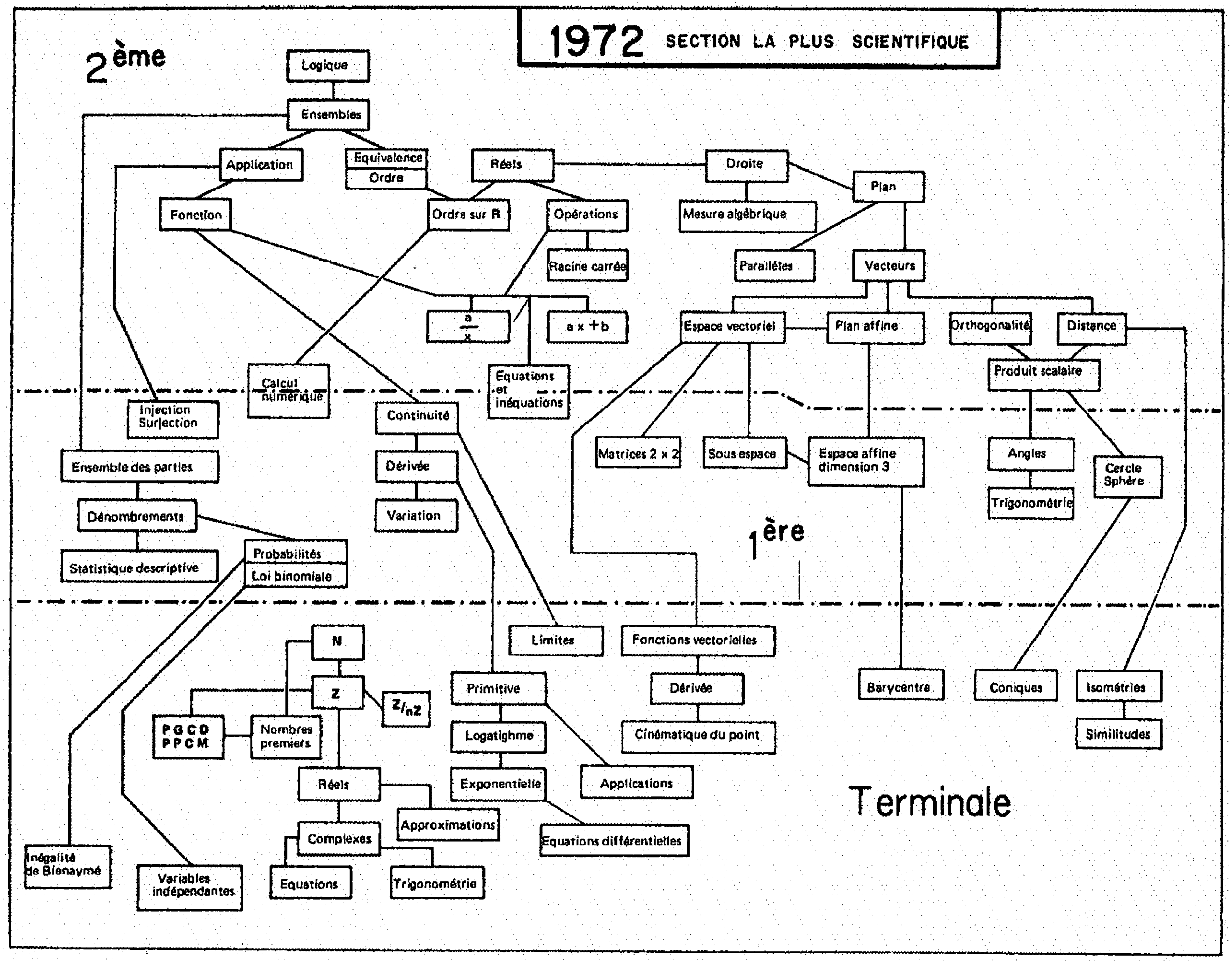


Figure 4 : Réseau conceptuel caractérisant le programme de 1972

Deux types d'équations différentielles ($y'=ay$ et $y''+\omega^2 y=0$) apparaissent dans ce programme. Elles sont étudiées en analyse, dans la partie « Etude des exemples de fonctions d'une variable réelle », mais le texte du programme à leur sujet n'a pas fondamentalement changé par rapport à celui de 1967.

VII : Equations différentielles 5°) Recherche des fonctions numériques une ou deux fois dérivables de la variable réelle x vérifiant les équations : $y' = ay$, a étant une constante réelle $y'' + \omega^2 y = 0$, ω étant constante réelle non nulle (on admettra que les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2).

Tableau 2 : Extrait du programme de la classe terminale C (1972)

Le changement d'habitat constaté ici ne modifie pas la principale compétence à acquérir, qui consiste à rechercher des fonctions numériques une ou deux fois dérivables vérifiant des équations différentielles données.

b). Le mode de traitement et son intérêt

Comme dans les précédents programmes, le mode de traitement des équations différentielles n'est pas précisé. Cependant, le programme de 1972 est renforcé par les notions d'algèbre linéaire et confère aux équations différentielles une place plus large en justifiant, pour la première fois depuis 1960, la raison de leur étude. *Elles sont étudiées pour leur utilité en physique*, comme nous pouvons le lire dans la circulaire n°71-244.

> « Toute généralité sur les équations différentielles est hors programme. On désire seulement qu'en vue de la physique les élèves sachent donner toutes les solutions des deux types d'équations explicitement indiqués… »
>
> (MEN, Circulaire n°71-244 du 26 juillet 1971)

D'ailleurs, il est mentionné dans les commentaires de ce programme (voir préambule (a) p. 40) que l'étude des équations différentielles ne fait pas partie des programmes du baccalauréat.

Les programmes publiés en 1978 conservent, pour l'essentiel, les objectifs du programme de 1971

I.1.3. Programmes de 1980 à 1990

Au début des années 80, en réaction à la réforme des mathématiques modernes, l'enseignement des mathématiques en France connut une nouvelle réforme, dite « contre-réforme des mathématiques modernes».

a) Les années 1980 et le constructivisme

La contre-réforme des mathématiques modernes met un accent particulier sur les activités de l'élève en tenant compte des contraintes liées aux savoirs et au fonctionnement cognitif de l'élève. Elle s'appuie sur une conception des mathématiques différente de celle des réformes précédentes :

> « L'accent n'est plus mis sur les mathématiques comme univers des structures, comme langage universel de la science, mais des mathématiques résultant d'une activité humaine, située à la fois dans le temps et dans l'espace. La finalité de ces mathématiques est la résolution des problèmes, problèmes suscités par le développement interne de la discipline ou d'autres secteurs scientifiques ». (Artigue 1996, p. 210).

Que devient la place des équations différentielles dans les nouveaux programmes ? Dans le programme de 1981, mis en application en 1982, apparaît en effet une grande différence par rapport aux programmes précédents.

Places des équations différentielles

Les équations différentielles sont étudiées en classes de terminale (séries C, E et D). Elles changent d'habitat : elles font partie du chapitre IV « *Le calcul intégral* » et leur étude s'élargit aux équations différentielles du second ordre du type $y''+hy'+ky=0$.

Cependant, il est hors de question d'interroger les élèves sur des exemples de résolution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre, c'est-à-dire les équations de la forme $y''+hy'+ky=a\cos(\omega x+\varphi)$.

e) Résolution des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants du premier et du second ordre. On prouvera dans chaque cas l'existence et l'unicité de la solution vérifiant des « conditions initiales » données. L'alinéa ci-dessous ne fera l'objet d'aucune question de mathématiques au baccalauréat. Sur des exemples numériques, résolution d'une équation différentielle à coefficients constants de la forme $y''+hy'+ky=a\cos(\omega x-\varphi)$

Tableau 3 : Extrait des programmes (1982)

Ceci donne une place plus grande aux équations différentielles par rapport aux programmes précédents et offre une ouverture plus large aux sciences expérimentales, en particulier la physique, comme en témoignent les commentaires de ce programme (1982) :

> Les situations nombreuses qui en sciences physiques mettent en jeu le calcul différentiel et intégral (vitesse et distance parcourue, intensité et quantité d'électricité,...) sont d'un intérêt mathématique et pédagogique évident. La résolution d'une équation différentielle particulière, avec second membre
>
> $a \cos(\omega x - \varphi)$, est proposée plus loin dans une intention analogue d'interdisciplinarité.
>
> MEN (1980) Commentaire de programme p.100.

L'environnement conceptuel des équations différentielles s'élargit en raison de l'étude des équations différentielles du second ordre avec un terme en dérivée première, du type $y''+hy'+ky = 0$ qui font intervenir, entre autres, les nombres complexes.

Mode de traitement et intérêt

Le mode de traitement des équations différentielles n'est pas donné. Ce traitement consiste, pour l'essentiel, à résoudre des équations différentielles linéaires homogènes du premier et du second ordre. Dans ce programme, l'existence et l'unicité des solutions vérifiant des conditions initiales données devient une préoccupation : elles sont à prouver dans chaque cas.

b) Programme de 1989

Les différents programmes élaborés au cours de cette période ne semblent pas fondamentalement différents des précédents. Les équations différentielles constituent un sous-chapitre du grand chapitre sur *le calcul intégral.*

Par rapport aux programmes précédents, une précision sur la méthode de résolution des équations différentielles du second ordre est donnée dans le programme de 1989. Il indique, en effet, que la résolution de ces types d'équations se fait à l'aide de l'équation caractéristique. Par ailleurs, il est exigé qu'une méthode à suivre soit indiquée pour le cas d'étude des situations qui mènent à une équation du second degré avec second membre. L'existence et l'unicité de la solution d'une équation du second ordre satisfaisant à des conditions initiales données sont admises.

Un fait nouveau dans ce programme : un accent particulier est mis sur de l'interdisciplinarité. En effet, ce programme précise que certaines situations seront choisies en relation avec l'enseignement des sciences physiques (mécanique du point, circuits électriques...). Il recommande, par conséquent, de mettre en évidence certains comportements "mathématiques" comme l'amortissement, l'oscillation (...).

I.1.4. Programmes de 1990 à 2000

Au début des années 1990, à la faveur de l'évolution des rapports entre les mathématiques et l'informatique dans l'enseignement et de la nécessité de développer une approche interdisciplinaire de l'enseignement des sciences, il ressort qu'il n'est plus question de structure ; les mots clés sont "interaction" et "modèle" (CNRS, 1989, 1990 et 1993).

De même qu'à l'époque des structures, dit J.-P. Kahane (1996), la mathématique se présentait comme la science même des structures, tout se passe comme si, à l'heure des interactions et des modèles, la mathématique se présentait comme lieu privilégié des interactions et des sciences de la modélisation.

C'est dans cet esprit que l'on peut inscrire le souci croissant de donner aux mathématiques le rôle de « science » dans l'enseignement des sciences. Ceci a conduit quelques mathématiciens à mettre en place une commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, connue sous le nom de "commission Kahane". (CNDP, 2002)

a) Programme de 1998

Place des équations différentielles

Dans ce programme, l'étude des équations différentielles se réduit à celle des équations différentielles du premier ordre $y' = ay$ et du second ordre $y'' + \omega^2 y = 0$.

Les équations différentielles sont étudiées dans le chapitre "*Fonctions usuelles*".

c) Fonctions usuelles - Fonction logarithme népérien et fonction exponentielle ; Résolution de l'équation $y' = ay$, où a est un nombre réel : existence et unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée - Fonctions circulaires sinus, cosinus et tangente. Résolution de l'équation différentielle $y'' \pm \omega^2 y = 0$, où ω est un nombre réel : existence et unicité (admises) de la solution vérifiant des conditions initiales données.

Tableau 4 : Extrait du programme 1998

Mode de traitement et intérêt

L'étude des équations différentielles retenues sert d'appui pour traiter trois types de fonctions usuelles particulières :

La fonction logarithme népérien (comme pré-requis) et la fonction exponentielle (donnant la forme des solutions) pour les équations différentielles de la forme $y' = ay$

Les fonctions circulaires : sinus, cosinus et tangente pour les équations différentielles de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$.

Relation mathématiques-physique :

La relation entre les mathématiques et les autres sciences, en particulier les sciences physiques est très prononcée dans ce programme. Une des intentions majeures de ce programme est de

> « ...promouvoir l'unité de la formation des élèves en exploitant les interactions entre les différentes parties du programme et entre les mathématiques et les autres disciplines »
>
> (MEN, programmes de mathématiques et instructions, p. 6).

Comme nous pouvons le lire plus bas, il s'agit de relier l'enseignement des mathématiques à celui des autres disciplines sous deux aspects principaux :

> « Organisation concertée des activités d'enseignement ; étude de situations issues de ces disciplines, comprenant une phase de modélisation et une phase d'interprétation des résultats » (ibid. p. 13)

L'introduction des équations différentielles n'est pas suivie de commentaires particuliers. La connexion entre les mathématiques et les sciences physiques, en travaux pratiques, se fait à travers les fonctions. Il s'agira d'étudier des exemples de situations décrites au moyen de fonctions :

> « On s'attachera à interpréter les résultats (variations, signe, extremums, comportement asymptotique, ...). On étudiera quelques problèmes d'optimisation » (Ibid. p. 14).

I.1.5. Le programme de 2002

a) Le projet de programme 2001[5]

Nous nous sommes intéressés à un projet de programme proposé par le groupe d'experts et soumis à consultation. (Il n'a jamais vu le jour).

[5] B.O. n° 6 du 30 janvier 2001

Le projet de programme se donne comme objectif de montrer la cohérence et l'harmonie des mathématiques. Un nouvel habitat et une nouvelle niche pour les équations différentielles figurent dans ce projet de programme.

Type d'équations différentielles

Un seul type d'équation différentielle est retenue : il s'agit de l'équation différentielle de la forme $y' = ay + b$

Mode de traitement et intérêt

Le programme indique que l'étude du seul type d'équation différentielle retenu, sera introduite par le professeur de mathématiques à partir d'une situation externe aux mathématiques. L'exemple qui peut être retenu est celui d'une situation de refroidissement de Newton. Ce phénomène est régi par une équation différentielle de la forme

$y' = k(T_0 - y)$ où y est la température d'un objet mis dans une pièce à température T_0.

Ce programme précise qu'aucune connaissance spécifique n'est exigible sur les exemples traités. L'important ici, est d'introduire ce type d'équation où l'inconnue est une fonction ; il s'agit autant de pouvoir donner certaines propriétés que de les calculer explicitement. C'est ainsi que l'apport de l'outil informatique est primordial.

En considérant cet exemple, on définira la notion de "solution" d'une équation différentielle, puis on représentera le champ des tangentes et des courbes isoclines. Ensuite, on tentera de donner une intuition du comportement des solutions.

Cette approche qualitative de traitement des équations différentielles se situe dans le cadre géométrique. Elle s'appuie sur des champs des tangentes tracés par des logiciels ; ceci est nouveau depuis les années 1960. Les équations différentielles ne sont pas introduites en mathématiques pour la seule raison de répondre à certaines questions en physique. La primeur est donnée aux professeurs de physique d'aborder certaines équations différentielles notamment $y'' + \omega^2 y = 0$ *et* $y' = ay$. La méthode d'Euler, qui est une méthode numérique, est traitée en physique et fait l'objet d'un travail consistant en mathématique.

b) Programme actuel 2002

Place des équations différentielles

Dans ce programme, un seul type d'équation différentielle est étudié : il s'agit de l'équation $y' = ay + b$, où a $\neq 0$ et b sont des réels donnés.

En comparant ce programme à ceux que nous avons analysés précédemment, nous constatons que ce programme de 2002 est réduit en termes de nombres d'équations à étudier. Cependant, il présente quelques particularités. Les équations différentielles entrent dans la construction du sens du concept de la fonction exponentielle et, du fait de leur importance en physique, deviennent un lieu privilégié pour faire vivre la liaison mathématiques-physique.

Construction de la fonction exponentielle :
équation différentielle comme outil formel

Dans ce programme, la première approche de la notion d'équation différentielle se fait lors de l'introduction de la fonction exponentielle. En effet, la fonction exponentielle est définie comme la solution unique de l'équation $f' = f$ pour $f(0) = 1$.

La notation «$f' = f$» est préférée à « $y' = y$ ». De plus, l'objet mathématique «$f' = f$» est appelé "équation", sans le qualificatif "différentielle". Nous l'avons qualifié d'« objet formel » car le processus de construction de la notion de fonction différentielle jusqu'à la construction sa courbe, ne nécessite pas la définition et des connaissances particulières de l'objet formel

$f' = f$.

CONTENUS	MODALITES DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Introduction de la fonction exponentielle		
Etude de l'équation $f' = kf$ Théorème : « il existe une unique fonction f dérivable sur R telle que $f'=f$ et $f(0)=1$. » Relation fonctionnelle caractéristique. Introduction du nombre e. Notation e^x. Extension du théorème pour l'équation $f'=kf$.	L'étude de ce problème pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique, ou par la recherche des fonctions dérivables f telles que $f(x+y)=f(x)f(y)$. On construira avec la méthode d'Euler introduite en première des représentations graphiques approchées de f dans le cas $k=1$; on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits. L'unicité sera démontrée. L'existence sera admise dans un premier temps. Elle sera établie ultérieurement à l'occasion de la quadrature de l'hyperbole. Approximation affine, au voisinage de 0, de $h \mapsto e^h$.	Ce travail se fera très tôt dans l'année car il est central dans le programme de mathématiques et de physique. Il fournit un premier contact avec la notion d'équation différentielle et montre comment étudier une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite. La méthode d'Euler fait apparaître une suite géométrique et donne l'idée que l'exponentielle est l'analogue continue de la notion de suite géométrique, ce que l'équation fonctionnelle confirme

CONTENUS	MODALITES DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Equation différentielle $y' = ay + b$		
	On démontrera l'existence et l'unicité de la solution passant par un point donné. On étudiera quelques problèmes où interviennent des équations différentielles se ramenant à $y' = ay + b$	Ce paragraphe, déjà abordé lors de l'introduction de la fonction exponentielle, pourra être reparti sur l'ensemble de l'année. On fera le lien avec l'étude de ces équations en physique ; on définira le temps caractéristique $\tau = -1/a$ pour $a < 0$; Les indications utiles pour se ramener à $y'=ay+b$ doivent être données. Des solutions de l'équation $y''+\omega^2 y=0$ seront introduites en cours de physique.

Tableau 5 : Extrait du programme de mathématiques 2002

Les équations différentielles, dans le programme de 2002, sont présentées comme un savoir transversal, donnant la possibilité aux enseignants de mathématiques et de physique de mener un travail « collaboratif » en vue de la compréhension et de la conceptualisation des phénomènes continus dépendant de temps.

Du fait que de nombreuses situations physiques peuvent se traduire mathématiquement par une équation différentielle, le programme demande que l'étude des équations différentielles en mathématiques se fasse en relation avec le cours de physique mais sans proposer de mode de traitement.

Ainsi, les équations différentielles permettent en mathématiques d'introduire la fonction exponentielle, de renforcer l'acquisition d'automatismes sur les calculs des primitives et de répondre à un des objectifs du programme : « Montrer la puissance des mathématiques pour la modélisation ».

I.2. Conclusion

Notre analyse des programmes publiés depuis les années 1960 jusqu'à nos jours montre que l'habitat des équations différentielles a considérablement évolué.

Au fil des années, le nombre des équations différentielles présentes dans les programmes s'est réduit. Cependant leurs liaisons trophiques se sont beaucoup enrichies.

Dans les programmes des années 60 et 70, les équations différentielles se trouvaient toujours au bout d'une chaîne trophique de concepts. Leur traitement était prévu vers la fin de l'année. C'est un type d'équations nouvelles caractérisées par la nature de ses solutions.

En raison de leur importance et de leur utilisation dans les autres disciplines notamment en physique, les équations différentielles s'enrichissent d'un nouveau type d'équations dans les programmes des années 80 et début 90. On y voit apparaître l'équation différentielle du type $y''+hy'+ky=0$, définie dans le même habitat que les précédents. Quant à leur liaison avec les autres concepts, on peut constater qu'elles se retrouvent toujours au bout d'une chaîne trophique.

Cependant, dans les nouveaux programmes, ceux publiés en 2001, en raison de l'introduction des outils informatisés pour le traitement des équations différentielles et de l'évolution de l'enseignement de la physique, elles jouent désormais le rôle d'un objet de savoir transversal, favorisant ainsi le « dialogue » des disciplines scientifiques et le développement d'activités interdisciplinaires

II. Analyse des programmes de physique

Introduction

« L'enseignement de la physique n'est pas une constante mais une variable. Il change avec le développement de la société dont il fait partie, avec les évolutions des points de vue de la société sur l'éducation et les sciences, ainsi qu'avec les évolutions de la physique et de la technologie elles–mêmes » (Lijnse, 1997).

Les programmes de physique n'ont pas changé entre la grande réforme de 1902 et la fin des années 60. Avec les formidables avancées de la physique, l'enseignement des sciences étant considéré comme dépassé dans son contenu, a été rénové profondément par la commission Lagarrigue mise en place en octobre 1970.

> Au début de 1970 on indique qu'il s'agit « d'apporter un élément de culture générale à des élèves très divers » [Doc. CL, 1971 p. 34] et « informer les adolescents des réalités (techniques, conceptuelles, méthodologiques) qui leur sont, jusqu'ici, restées insuffisamment familières alors qu'elles sont une des caractéristiques fondamentales de notre temps » [Doc. CL, 1973 p. 40]
>
> (Hulin 1996, p. 110)

La commission Lagarrigue débute ses travaux après la réforme des mathématiques modernes.

Les équations différentielles qui apparurent dans les programmes des mathématiques dans le début des années 1960 et qui sont "bien adaptées" pour exprimer dans le langage des mathématiques les phénomènes physiques continus, vont prendre plus de place dans l'enseignement de la physique.

C'est à la rentrée de 1972 qu'intervient l'expérimentation des programmes scolaires publiés par la commission Lagarrigue. Cette phase d'expérimentation commence avec les programmes de seconde dans un certain nombre d'établissements et la généralisation a lieu en 1981 (Hulin, 1996, p. 110).

Les programmes de physique des classes terminales (C, D et E) sont publiés en 1979[16] et des changements importants sont apportés par rapport aux programmes de 1961. On peut donc distinguer deux grandes périodes : l'avant 1979 et la période 1979-2002. Une troisième période débutant alors avec les programmes actuels.

II.1. Les programmes avant 1979

II.1.1. Le programme de 1966

Le programme des classes terminales scientifiques, publiés en 1966, reprend l'essentiel du programme de 1961. Les équations différentielles ne constituent pas un objet d'étude en soi. Les commentaires relatifs à leur sujet ne précisent pas de façon explicite leurs place et rôle dans l'enseignement de la physique

Lieux d'apparition et mode de traitement

La principale équation différentielle qui apparaît dans ce programme est donnée sous la forme de l'égalité $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ (1), avec $\vec{\gamma} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}$

L'égalité (1) traduit la relation fondamentale de la dynamique.

Appliquée au mouvement de rotation sinusoïdal d'un solide, cette relation s'écrit $M = J\alpha''$; α''étant l'accélération angulaire. On obtient ainsi l'équation différentielle $\alpha'' = -\omega^2\alpha$ (2) déduite de l'expression $\alpha = \alpha_m \sin(\omega t + \varphi)$.(3)

L'appellation « équation différentielle » est introduite dans le seul cas de l'étude dynamique des oscillations de faible amplitude d'un pendule pesant et dans le cas-limite du pendule simple.

Pourtant, les équations différentielles sont utilisées dans plusieurs parties de ce programme.

C'est le cas, en mécanique, de l'expression de l'accélération du point mobile à l'instant t

($\gamma = -\omega^2 x$) qui est établie dans le cas de l'étude (cinématique ou dynamique) du mouvement rectiligne sinusoïdal. De même, en électricité sur la variation de la différence de potentiel instantanée dans un circuit *RL*, l'équation différentielle a pour expression

[16] Ministère de l'Education nationale. Direction des Lycées : sciences physiques. Classes des lycées de l'enseignement général et technique (1979) pp. 135-156

$$u = Ri + L\frac{di}{dt}$$

S'agissant du traitement de l'équation différentielle (2), la solution mathématique est donnée *ex cathedra*, elle doit être vérifiée par report dans l'équation différentielle, mais aucune indication n'est explicitement donnée sur le sens (et donc la détermination) de l'amplitude Xm et de la phase φ.

II.2. Programmes après 1979

II.2.1. Programme de 1979

Ce programme est plus détaillé que les précédents. L'expression « équation différentielle » y apparaît explicitement.

1.1 Exemples d'oscillateurs mécaniques : pendule élastique et pendule de torsion. Équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique non amorti ; solution de cette équation, fréquence propre. Conservation de l'énergie. Amortissement d'un oscillateur.

L'équation du mouvement d'un oscillateur mécanique à une dimension : $m\ddot{x} + kx = 0$ est une conséquence de l'équation de mouvement du centre d'inertie : $\sum \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (Exemple d'une masse liée à un ressort). On vérifiera que $x = X_m \cos(\omega_0 t - \varphi)$ est solution et on déterminera la pulsion propre ω_0. (...) on étudiera l'oscillateur que constitue le pendule de torsion (...) On se bornera à indiquer que l'application des lois générales de la mécanique conduit à l'équation $J\ddot{\theta} = \sum M_\Delta$ en analogue à l'équation $m\ddot{x} = \sum f$. Le pendule pesant pourra être étudié en travaux pratiques comme un exemple d'oscillateur linéarisé. Pour un système amorti, on montrera qualitativement le phénomène. (...) En exercice, on pourra considérer une force de frottement proportionnelle à la vitesse ; l'équation $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0$, qu'il n'est pas question de résoudre mais en déduire que la variation de l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2$ est égale au travail de la force de frottement de mesure algébrique $-h\dot{x}$:

$$\delta E = \delta(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2) = kx\delta x + m\dot{x}\delta\dot{x} = (kx + m\ddot{x})\dot{x}\delta t = -h\dot{x}\delta x$$

1.2 Circuits oscillants

L'équation $L\ddot{q} + \frac{q}{c} = 0$ sera établie en identifiant les différences de potentiel aux bornes d'un condensateur et d'une bobine. Elle a pour solution $q = Q_m \cos(\omega_0 t - \varphi)$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

On vérifiera la conservation de l'énergie totale $E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$. L'analogie avec un oscillateur mécanique sera soulignée.

1.3 Circuits en régime sinusoïdal forcé

Le professeur se souviendra que (...) on ne s'intéresse qu'à des solutions particulières, sinusoïdales, de fréquence imposée, des équations différentielles générale des circuits (...) mais une telle présentation de cette question est hors programme. (...) En exercice, on pourra aussi noter que, pour un dipôle RLC série, on a : $u(t) = L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C}$; l'énergie que reçoit le dipôle pendant une durée δt est $ui\delta t = \delta(\frac{1}{2}Li^2) + Ri^2\delta t + \delta(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C})$.

...

4.2 Réactions nucléaires

La loi de décroissance sera donnée sous forme différentielle, plus directement accessible à l'expérience : $-dN = \lambda N dt$, et sous forme intégrale $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

Tableau 6 : Extraits des commentaires du programme officiel 1979

Lieux d'apparition et mode de traitement

En mécanique

Les équations différentielles apparaissent en premier lieu dans l'étude des oscillateurs mécaniques à une dimension. Dans un référentiel bien choisi (galiléen), pour le système étudié de masse *m*, l'application de la 2^{e} loi de Newton *(relation fondamentale de la dynamique)* permet d'établir une équation différentielle du second ordre de type

$$m\ddot{x} + kx = 0 \ (1) \text{ ou bien } m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0 \ (2)$$

La solution générale des équations de type (1) est donnée sous la forme $x = x_m \cos(\omega_0 t - \varphi)$

Par contre, celle des équations de type (2) n'est pas proposée : le traitement fait l'objet d'une "approche différentielle" (de l'énergie, intégrale première) permettant de montrer l'effet de dissipation d'énergie.

En électricité

Les équations différentielles apparaissent aussi en électricité. La partie « circuits oscillants » donne lieu à l'établissement d'équations différentielles analogues à celles traitées en mécanique (1) et (2), en précisant leurs ensembles de solutions.

$L\ddot{q}+\frac{q}{c}=0$ pour le circuit oscillant (circuit RL)

$u(t)=L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{q}{C}$ pour les circuits en régime sinusoïdal forcé

En radioactivité

Un autre type d'équation différentielle est établi et résolu dans l'étude du phénomène de décroissance radioactive. C'est une équation différentielle du premier ordre,

dN/dt = λN *(5)* où N désigne le nombre de noyaux radioactifs en fonction du temps.

L'ensemble de solutions de cette équation différentielle est la fonction $N = N_0\, e^{-\lambda t}$ (6), obtenue par une intégration simple. Cependant, aucune mention n'est donnée pour présenter (5) comme une équation différentielle : c'est une « forme différentielle » qui est présentée. La formulation du programme fait référence à l'expérience (« ... forme différentielle plus directement accessible à l'expérience. ») mais, au sens strict, n'indique aucune différence : les phénomènes mécaniques et électriques sont tout aussi (sinon plus) accessibles à l'expérience ! L'interprétation que l'on peut donner est en termes de différence entre des grandeurs que l'on pourrait qualifier de "conceptuelles" (la vitesse, la charge, etc.) et une grandeur "concrète", parce que *comptable* (nombre de noyaux, nombre de désintégrations). Cette distinction est tout à la fois en termes de représentation mentale et en termes scientifiques, puisqu'il y a bien, dans le cas de la radioactivité, un passage (délicat) entre des grandeurs discrètes et un modèle continu[17].

II.2.2. Programme de 1981, Terminales (application en 1983)

Le programme officiel

En dépit de quelques aménagements (notamment en section A et B) le programme de 1981 publié en 1983 est fondamentalement identique à celui de 1979, en ce qui concerne le traitement des équations différentielles.

[17] On retrouvera cette difficulté, mise en lumière, dans les programmes de 2002.

II.2.3. Le programme de 1987- 1988, Terminale C, E (application 1989)

La structure de ce programme est légèrement différente du précédent. Il est composé de quatre grandes parties : mécanique, électromagnétisme, optique, physique atomique et nucléaire.

2.4 Le pendule élastique Équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique non amorti. (l'oscillateur de rotation est hors programme). ... Commentaire : Plus généralement il s'agit d'étudier le comportement d'un système linéaire (ou linéarisé) autour de sa position d'équilibre stable. On vérifiera que x = $X_m\cos(\omega_0 t - \varphi)$ est solution de l'équation $\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$ avec ω_0 définissant la pulsation propre. On montrera que la quantité $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ se conserve au cours du mouvement. Le terme $\frac{1}{2}kx^2$ indépendant de la vitesse, apparaît ainsi comme une énergie potentielle élastique. Pour un système amorti...toute étude théorique exclue.. **3.1 Circuits oscillants** Équation différentielle d'un circuit LC, fréquence propre, conservation de l'énergie. (on utilisera l'analogie avec le pendule élastique) **3.2 Réactions nucléaires spontanées** La loi de décroissance sera donnée sous forme différentielle plus directement accessible à l'expérience : $-dN = \lambda N dt$ et sous forme intégrale $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

Tableau 7 : Extrait du programme 1989

a) Lieux d'apparition et mode de traitement

Comme dans les précédents programmes, *les équations différentielles étudiées sont celles du second ordre.* Elles apparaissent dans l'étude des oscillateurs mécaniques (oscillations rectilignes non amorties) et des oscillateurs électriques. L'équation différentielle du premier ordre qui permet de traiter mathématiquement le cas de la décroissance radioactive, n'est pas citée comme telle ; elle ne paraît pas être rattachée aux autres catégories d'équations différentielles étudiées.

Concernant la solution mathématique des équations différentielles du second ordre, leurs solutions sont données *ex cathedra* ; elles doivent être vérifiées par report dans l'équation différentielle mais aucune indication n'est explicitement donnée sur le sens (et donc la détermination) de x_m et φ (seule la pulsation ω_0 fait l'objet d'une attention particulière).

b) Intérêt, conséquences (immédiates et ultérieures)

Le comportement harmonique du phénomène est représenté par la courbe sinusoïdale d'une fonction périodique, qui donne ensuite accès à l'expression de la pulsation puis à la conservation de l'énergie.

Signalons que le traitement mathématique des systèmes (mécaniques) oscillants est le même que pour l'étude des circuits oscillants.

Pour le cas de la radioactivité, l'intérêt est accordé à l'écriture différentielle de la "loi" de décroissance radioactive.

Remarque

Par rapport au programme de 1979, on constate que la structure est la même mais que l'extension des applications a été réduite (pas de pendule de rotation, pas d'amortissement). Le caractère de généralité de ce type d'équation est souligné dans le commentaire qui fait état de "système linéarisé autour de la position d'équilibre stable" mais rien dans le programme explicite n'y correspond

II.2.4. Programme de 1995, Terminale S (application 1996)

2.4. Modèles **Contenu**	**compétences exigibles**
4.1. Un même formalisme pour de nombreux oscillateurs. Oscillations sinusoïdales libres, établissement de l'équation différentielle. 4.1.1 Oscillateur mécanique linéaire : application de la relation de la dynamique au cas du ressort linéaire horizontal. 4.1.2. Oscillateur électrique linéaire : application de la loi des tensions au dipôle LC	Définir les régimes oscillants critique, et sous-critique. … Établir l'équation différentielle d'un oscillateur (mécanique ou électrique) non amorti et, dans le cas de l'oscillateur sinusoïdal, retrouver l'expression de la période.
Activité support Étude à l'ordinateur de l'équation de Van der Pol : un modèle (oscillateur RLC entretenu) pour l'introduction aux effets non linéaires.	

Tableau 8 : Extraits du programme officiel

Commentaires des programmes

« ... On établit l'équation différentielle qui régit les oscillations pour le ressort linéaire horizontal, d'une part, pour le circuit LC, d'autre part. On souligne l'identité du formalisme traduit par l'équation différentielle : $x''+\omega_0^2 x = 0$ pour les oscillations libres non amorties. On peut par exemple, sur les oscillations libres du circuit *RLC*, établir que les oscillations amorties sont régies par une équation différentielle où intervient la dérivée $x'(t)$ à laquelle est associée la dissipation de l'énergie (Ri^2). $x'' + Ax' + \omega^2 x = 0$ ($A = cste$ pour *RLC* ou un oscillateur mécanique à frottement visqueux). »

a) Lieux d'apparition et mode de traitement

L'objet équation différentielle apparaît donc dans un chapitre spécifique consacré à l'analyse *théorique* des oscillateurs, qui fait suite à une étude expérimentale de chacun des types d'oscillateurs.

Quant au mode de traitement, il n'est pas précisé.

b) Intérêt immédiat et ultérieur

L'objectif de l'utilisation des équations différentielles dans ce programme est de montrer qu'une même équation différentielle peut *modéliser* plusieurs types de phénomènes de natures différentes. Le programme est particulièrement explicite puisqu'il titre « Modèles » et sous-titre « un même formalisme pour de nombreux oscillateurs ».
Dans le cas des phénomènes périodiques, il s'agit de retrouver l'expression de la période obtenue par analyse dimensionnelle et expérimentale.

Remarque

En comparant avec le programme précédent, on remarque le changement de statut explicite des équations différentielles qui sont ici considérées comme des modèles "génériques". Le mode de traitement informatique est indiqué comme une possibilité, mais sans indication quant à la méthode de calcul sous-jacente. On remarque aussi qu'aucune indication n'est donnée quant à la résolution des équations linéaires.

c) Nouvelle organisation

L'étude de ces systèmes est organisée en trois étapes :

Présentation des systèmes oscillants par diverses illustrations des phénomènes issus de la biologie, la chimie ou de la physique. Il s'agit aussi de présenter les grandeurs caractéristiques des deux grandeurs : la période et la fréquence. C'est une approche qualitative.

Étude de ces oscillateurs. Il s'agit de poser les problèmes des oscillateurs dans toute leur généralité. Les oscillateurs étudiés sont des oscillateurs mécaniques et électriques.

C'est une étude expérimentale en termes d'énergie qui est prévue.

> « On montre qu'un oscillateur mécanique non amorti évolue en énergie mécanique constante … » (commentaire du programme, p. 84)

Modèles

C'est à ce niveau que les équations différentielles apparaissent de façon explicite. Elles jouent le rôle de modèle et traduisent un formalisme pour de nombreux oscillateurs.

> « On souligne l'identité du formalisme traduit par l'équation différentielle :
>
> $$mx'' + \omega^2 x = 0$$
>
> pour les oscillateurs libres non amorties … On peut par exemple, sur les oscillations libre du circuit RLC, établir que les oscillations amorties sont régies par une équation différentielle où intervient la dérivé x'(t) à laquelle est associée la dissipation de l'énergie (RI^2)
>
> $$x''+Ax'+ \omega^2 x=0$$
>
> (A = cste pour *RLC* ou un oscillateur mécanique à frottement visqueux) »
>
> (Commentaire du programme 1996, p.86)

II.2.5. Programmes de 2002

Extraits du programme officiel (B.O. hors série n°4 du 30 août 2001)

Contenus	*connaissances et savoir-faire exigibles*
B-1.3 Loi de décroissance Évolution de la population moyenne $\Delta N = - \lambda N \Delta t$; $N = N_0 e^{-\lambda t}$. Constante de temps $\tau = 1/\lambda$. Demi-vie $t_{1/2} = \tau \ln 2$.	 Connaître l'expression de la loi de décroissance et exploiter la courbe de décroissance. Utiliser les relations entre τ, λ et $t_{1/2}$.
C-1.2 - Dipôle RC : Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension : tension aux bornes, intensité du courant. étude expérimentale et étude théorique 2.2 Dipôle RL : Réponse en courant d'une bobine à un échelon de tension : étude	Effectuer la résolution analytique pour la tension aux bornes du condensateur Effectuer la résolution analytique pour l'intensité. Etude du courant dans un dipôle RL soumis à un échelon de tension

expérimentale et théorique (résolution analytique) 2.3. Oscillations libres dans un circuit RLC série : Résolution analytique dans le cas d'un amortissement négligeable. circuit. Expression de la période propre T0 = 2 p√LC	Dans le cas d'un amortissement négligeable, effectuer la résolution analytique pour la tension aux bornes du condensateur.
D-2.1 Chute verticale avec frottement Chute verticale libre Résolution analytique de l'équation différentielle du mouvement; importance des conditions initiales. D- 3.2 Le dispositif solide-ressort 2ème loi de Newton, équation différentielle, solution analytique dans le cas d'un frottement nul. Période propre.	Appliquer la deuxième loi de Newton à un corps en chute verticale dans un fluide et établir l'équation différentielle du mouvement, la force de frottement étant donnée. Connaître le principe de la méthode d'Euler pour la résolution approchée d'une équation différentielle. Définir une chute libre, établir son équation différentielle et la résoudre Dans le cas de la résolution par méthode itérative de l'équation différentielle, discuter la pertinence des courbes obtenues par rapport aux résultats expérimentaux (choix du pas de résolution, modèle proposé pour la force de frottement). ...Utiliser un tableur ou une calculatrice pour résoudre une équation différentielle par la méthode d'Euler. Appliquer la deuxième loi de Newton au solide et effectuer la résolution analytique dans le cas d'un dispositif oscillant horizontalement.

Ce programme est accompagné d'un commentaire. Nous en donnons un extrait relatif aux trois parties qui nous intéressent.

Décroissance radioactive

« Le thème de la radioactivité est l'occasion d'opérer une convergence thématique avec les mathématiques (exponentielle, probabilité, statistiques et équation différentielle) et les sciences de la Vie et de la Terre (datation). ... L'observation d'une décroissance radioactive permet d'établir empiriquement sa loi d'évolution. Connaissant un ensemble de valeurs de $\Delta N/\Delta t$, on peut remonter à la dépendance temporelle de N(t), en utilisant la notion d'intégrale vue en mathématiques comme "aire sous la courbe", vérifier qu'elle est bien exponentielle et en déduire une constante de temps à partir des conditions initiales ».

Systèmes électricités

« Dans chaque cas considéré (circuit RC, RL et LC), ce qui est appelé "résolution analytique" dans la colonne des compétences exigibles comprend : l'établissement de l'équation différentielle, la vérification qu'une solution analytique proposée la satisfait, et la détermination des constantes à partir des paramètres du circuit et des conditions initiales. On rappelle que ces compétences sont des compétences scientifiques transversales ».

Systèmes mécaniques

« ... L'appropriation des lois de Newton, à travers les différents exemples de mouvements étudiés, permet aux élèves de pratiquer les différents aspects de la démarche scientifique : - modéliser un système et utiliser les lois de la dynamique pour prévoir son comportement, en utilisant une résolution analytique et/ou une méthode numérique itérative; ... Dans chaque cas considéré, ce qui est appelé "résolution analytique" dans la colonne des compétences exigibles comprend : l'établissement de l'équation différentielle, la vérification qu'une solution analytique proposée la satisfait, et la détermination des constantes à partir des paramètres du circuit et des conditions initiales.

... L'équation différentielle ne sera établie que dans le cas d'un ressort à réponse linéaire et horizontal. Dans le bilan des forces et dans l'écriture de l'équation différentielle on tiendra compte d'une force de frottement f dont on ne précisera pas l'expression. La solution de l'équation différentielle sera donnée sous la forme $x= x_m\cos(2\pi t/T_0+ \varphi_0)$; φ_0 est la phase à l'origine des dates. La pulsation propre ne sera pas introduite ».

Remarque : Plusieurs nouveautés

Accroissement de la place et du rôle des équations différentielles

En comparaison avec les programmes précédents, nous remarquons que le programme de 2002 apparaît notablement différent, de par la place donnée aux équations différentielles, de par l'introduction des équations différentielles du premier ordre (en électricité), et enfin de par le positionnement comme équation différentielle du second ordre de la relation $F = ma$.

De plus, les équations différentielles font l'objet d'un traitement informatisé en utilisant la méthode d'Euler, méthode vue en mathématiques en classe de première lors de l'étude des suites.

Remarque

Le cas de la chute verticale libre (mouvement sous le seul effet du champ de pesanteur) conduit à une équation différentielle de type $x'' = -g$ qui n'est pas prise en compte dans le programme de mathématiques.

Au regard de ce qui précède, l'analyse des ouvrages portera donc sur les points suivants :

lieu d'introduction de la notion d'équation différentielle (du premier ordre) et quelle référence aux mathématiques ?

lieu d'introduction de la méthode d'Euler ?

place des équations différentielles du second ordre en mécanique : approche dès l'introduction de la seconde loi de Newton, traitement en tant qu'équation différentielle de $x'' = -g$.

CHAPITRE V :
ANALYSE DES MANUELS DE MATHÉMATIQUES ET DE PHYSIQUE

Dans le chapitre précédent, nous avons caractérisé l'évolution de la "place" des équations différentielles dans les programmes scolaires de mathématiques et de physique. Notre premier objectif est d'analyser dans quelle mesure les intentions didactiques qui fondent les programmes actuels du point de vue de la relation mathématiques – physique, se trouvent concrétisées dans les manuels scolaires afin de rendre compte de la manière dont la continuité didactique y est mise en œuvre. Les manuels analysés dans ce chapitre sont ceux conformes aux programmes scolaires actuels de mathématiques et de physique et qui ont été édités lors de la mise en place desdits programmes (2002).

I. Construction de la grille d'analyse

Notre problématique sur les interactions entre les mathématiques et la physique porte donc essentiellement sur les *situations de modélisation.*

Notre premier travail a été de faire une analyse descriptive des manuels de façon à situer la place accordée par les auteurs de manuels scolaires. L'analyse descriptive (quantitative) des manuels scolaires comporte donc tout naturellement des informations quant aux champs et modes d'introduction des équations différentielles dans les manuels de physique et aux champs disciplinaires invoqués dans les manuels de mathématiques, des informations sur les nombres d'exercices correspondants, etc.

Pour l'analyse qualitative, compte tenu des cadres théoriques auxquels nous nous référons pour ce travail, nous avons construit une grille d'analyse des manuels, applicable aussi bien en mathématiques et qu'en physique (à quelques différences près). Nous avons pour cela retenu 4 axes d'analyse :

les jeux de cadres de rationalité ;

la praxéologie disciplinaire sous-tendue ;

la place des registres de représentation et de leur coordination ;

le traitement informatique : place et modalités de la méthode d'Euler

Ce chapitre est consacré aux trois premiers points, le quatrième faisant l'objet d'un chapitre spécifique. Nous précisons tout d'abord notre grille, puis dans les parties suivantes nous présenterons les résultats de notre analyse (quantitative et qualitative) des manuels de mathématiques (partie II) et de physique (partie III).

I.1. Continuité didactique du point de vue de la modélisation et des jeux des cadres de rationalité

La nécessité de développer une approche interdisciplinaire de l'enseignement des sciences a fait émerger depuis les années 70, mais encore plus dans les années 80 et 90, les notions de modèle et de modélisation (rapports CNRS 1990, 1993 ; Rapport Kahane 1996, etc.). Johsua et Dupin (1999, pp. 327-328) considèrent que la mise en œuvre du processus de modélisation dans les classes peut être un moyen de traiter des obstacles qui apparaissent chez certains élèves. Dès lors, l'étude des situations de modélisations dans les manuels scolaires présente un intérêt majeur pour notre analyse de la continuité didactique entre les mathématiques et la physique.

Cet axe d'analyse vise donc à caractériser la place et la nature de la **modélisation** telle qu'elle apparaît dans les manuels, aussi bien des mathématiques et de physique, et ce à propos du cœur de notre problématique : les équations différentielles du premier ordre.

Par caractériser la place, nous entendons :

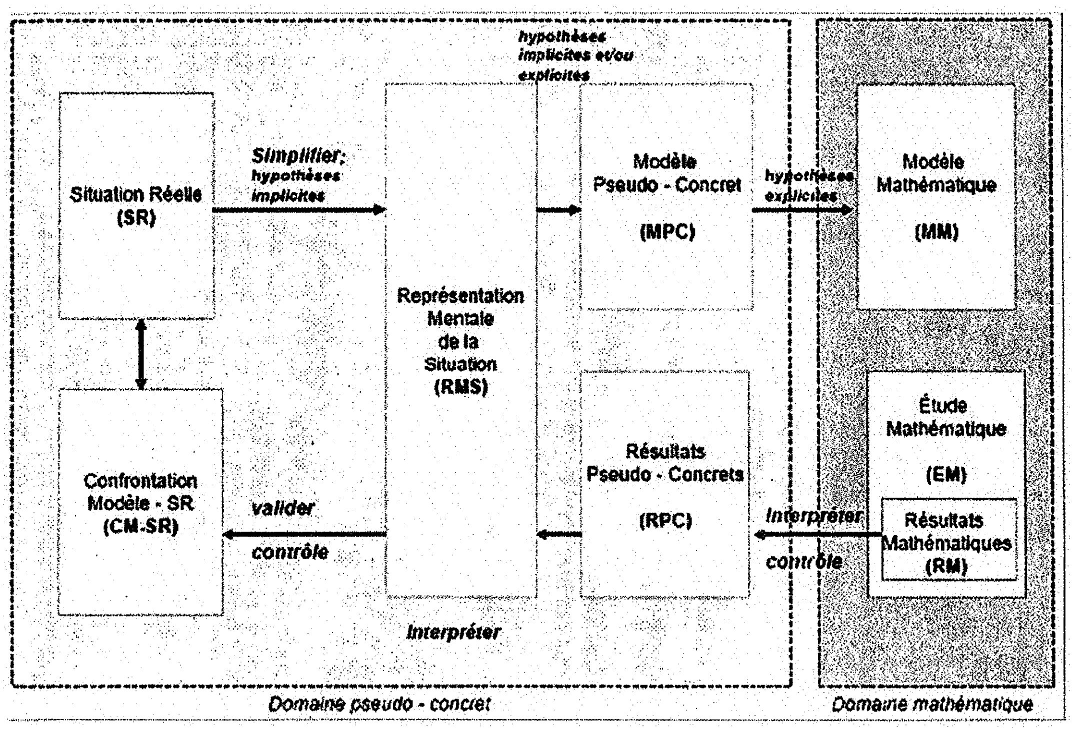
- identifier les champs (domaines disciplinaires) dans lesquels apparaissent et sont traitées les équations différentielles,
- quantifier le volume qui y est consacré.

Caractériser la nature, c'est dégager les caractéristiques de l'interaction des deux disciplines dans des activités relevant de la modélisation par équation différentielle. En particulier, il s'agit de voir les articulations qui se jouent entre les considérations et les tâches qui relèvent de la physique et celles qui sont de l'ordre des mathématiques.

Ci-dessous, quelques précisions préalables relatives à l'analyse des manuels de mathématiques et de physique afin de mieux situer notre problématique sur les jeux de cadres de rationalité.

Les manuels de mathématiques

Dans les manuels de mathématiques, figurent deux catégories de situations :
Des situations que nous qualifions d'*intra-mathématiques* quand l'énoncé n'est constitué que de notions mathématiques. Le champ de départ ainsi que son traitement et, le cas échéant, son interprétation, sont alors exclusivement mathématiques (Exercice Bréal 2002, p. 84)
Des situations que nous qualifions d'*extra-mathématiques* si l'énoncé s'appuie sur une problématique relevant d'une autre discipline (physique, chimie, biologique, économie, etc.). C'est donc dans cette seconde catégorie que se trouvent les situations de modélisation qui nous intéressent ici.
Plusieurs schémas ont été proposés pour traduire le processus de modélisation. Nous rappelons ci-dessous le schéma[18] du processus de modélisation « scolaire » qui apparaît dans l'enseignement des mathématiques lors de l'étude des activités de modélisation, selon Rodriguez (2007).



[18] Ce schéma est extrait d'un schéma plus général qui traduit le processus de modélisation telle qu'elle se pratique en science (savoir savant).

En nous appuyons sur le schéma ci-dessus et au regard des contenus du programme actuel de mathématiques (2002), des documents d'accompagnement desdits programmes et de la lecture de quelques situations extra-mathématiques, nous proposons dans le synoptique ci-dessous, les étapes classiques de traitement d'une situation de modélisation conduisant à une équation différentielle. En général les situations à traiter contiennent les éléments d'un modèle (physique) sur lesquels l'élève doit s'appuyer pour déterminer l'équation différentielle (quand celle-ci n'est pas donnée[19]). C'est ainsi que nous qualifions le domaine dans lequel l'énoncé est proposé de "pseudo-réel". L'étude de l'équation différentielle obtenue se fait ensuite dans le domaine des mathématiques.

Cadre de rationalité intelligible	*Principales étapes*		
Physique	Situation de départ traduit dans un modèle de "physicien" (champ de départ)		Interprétation du résultat (retour au champ de départ)
Mathématiques	Équation différentielle mathématique	⇒	Résolution mathématique de l'ED-math ou bien application d'un résultat

(Champ de traitement)

Schéma 1: processus-type d'une activité de modélisation dans l'enseignement des mathématiques.

L'analyse qualitative porte sur l'articulation entre un phénomène de physique plus ou moins modélisé et un modèle mathématique purement symbolique (équation différentielle, solution de l'équation différentielle). Il s'agit donc d'une part de relever ce que nous appelons le *champ de départ* de la situation à traiter (cdd) ou champ de référence, et le *champ de traitement* de cette situation (cdt) et, d'autre part, d'analyser les passages cdd ➔ cdt et cdt ➔cdd, qui correspondent donc à des changements de cadre de rationalité/d'intelligibilité.

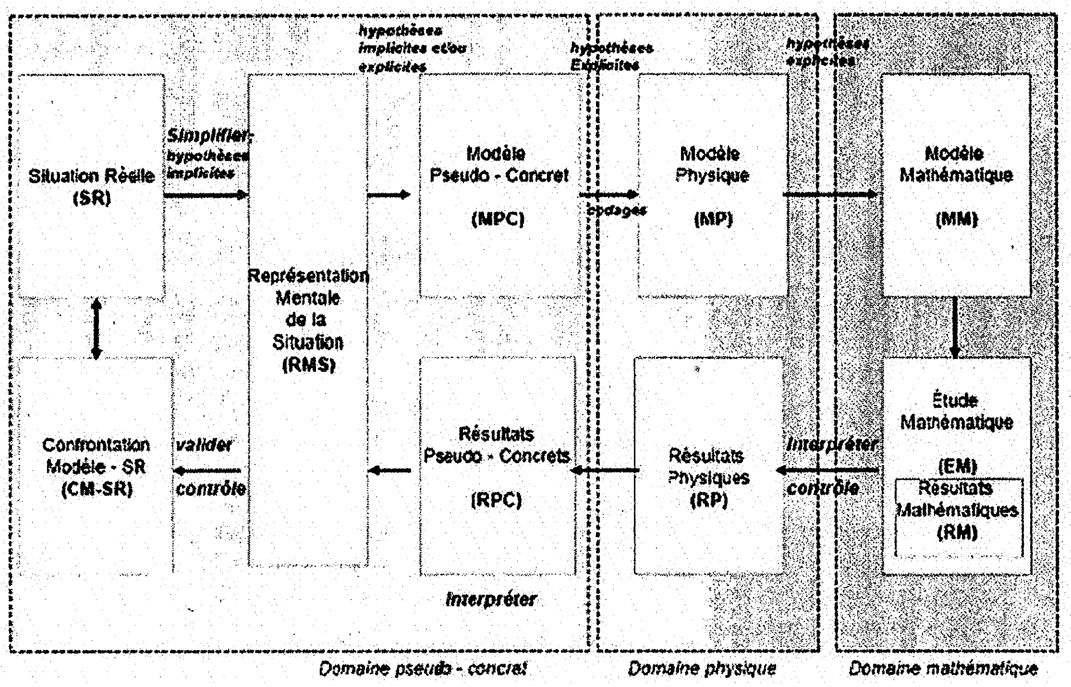
Les manuels de physique

19 Suivant le programme de mathématiques (2002) le résultat de la modélisation extra-mathématique est donné pour l'essentiel.

Les *situations* qui intéressent notre analyse sont celles qui portent sur des phénomènes physiques modélisés par des équations différentielles du premier ordre (modèles physiques).

Sur le plan de l'analyse qualitative et de la caractérisation de l'interaction/recouvrement avec les mathématiques, un certain nombre de questions se posent très rapidement, dès lors que l'on envisage l'étroite imbrication des mathématiques et de la physique au cœur même du processus de modélisation et que l'on s'interroge sur la façon dont cela peut être pris en compte dans le cours et les exercices.

Nous reprenons ci-dessous le schéma de modélisation présenté dans la thèse de Rodriguez (2007) décrivant, cette fois-ci, la démarche de modélisation qui apparaît dans le cours de physique.



Comme dans la partie précédente, nous nous appuyons sur le schéma ci-dessus, sur les contenus des programmes et documents d'accompagnement, et sur la lecture des manuels pour proposer le synoptique ci-dessous qui donne un aperçu sur l'articulation des notions et modèles dans une situation de modélisation dans les activités en physique

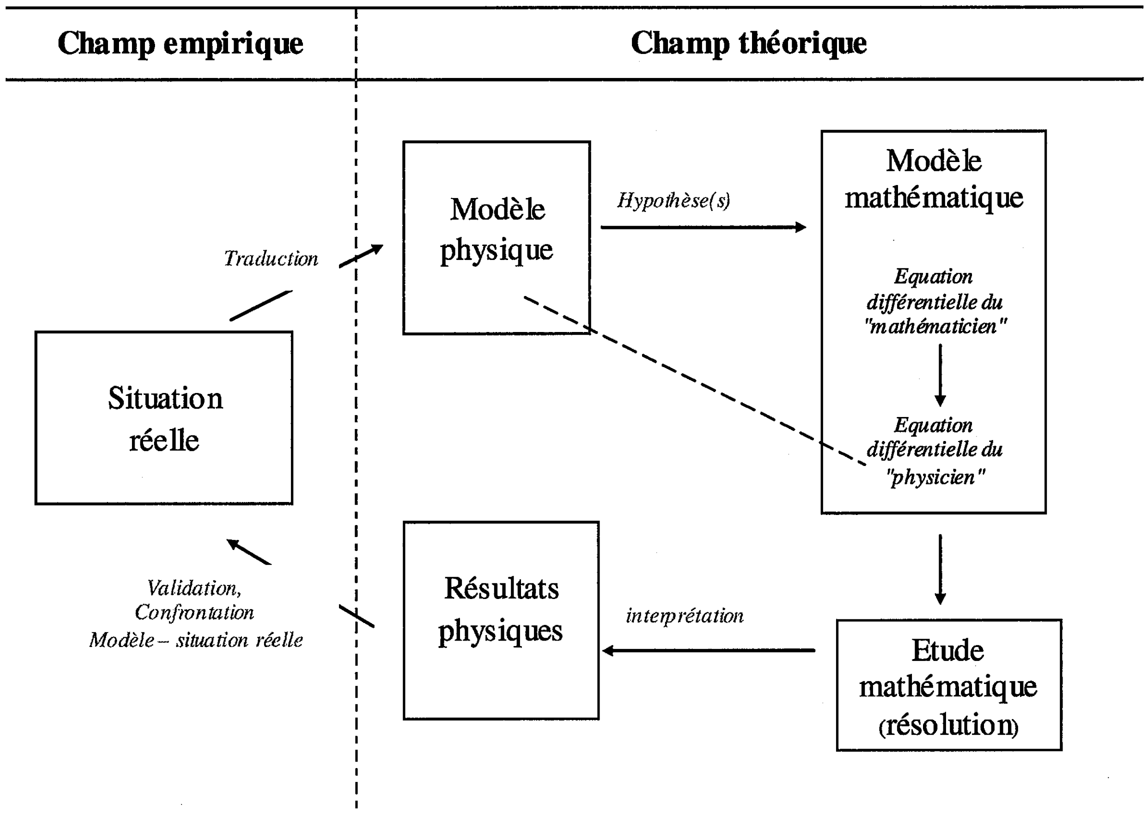


Schéma 2 simplifié du processus de modélisation dans l'enseignement de physique

Le questionnement se place au niveau de la façon dont l'objet/outil "équation différentielle" est introduit et utilisé et les questions sont du type :

y a-t-il une phase de "reconnaissance" du type d'équation, c'est-à-dire portant sur le fait qu'entrent en jeu une fonction inconnue et sa dérivée ?

quel est le type de lien avec les mathématiques : simple "invocation", rappel de cours de mathématiques ?

l'équation est-elle transformée de façon à faire apparaître une forme canonique (le "modèle" mathématique) et à donner la solution "mathématique" ?

si la forme de la solution est donnée : est-elle donnée sous une forme générique mathématique ou bien directement avec les symboles-paramètres du physicien ?

y a-t-il un travail d'identification de "constantes", ou bien la solution est-elle donnée entièrement avec les paramètres du physicien (la tâche ne consistant alors qu'à dériver, reporter, et vérifier que "ça marche").

I.2. Continuité didactique du point de vue des registres de représentation

Nous avons indiqué les principaux registres sémiotiques (Duval 1995) mis en jeu dans l'étude des équations différentielles : registre de la langue naturelle (RLN), registre algébrique ou symbolique (RS), registre numérique - y compris les tableaux des valeurs numériques- (RN), registre graphique (RG) et autres registres comme schémas, illustrations ...

L'analyse porte sur le repérage des registres utilisés dans chacune des disciplines, ce qui permettra peut-être de voir si certains sont favorisés, ou au contraire peu utilisés, par l'une ou l'autre discipline, mais surtout, de voir dans quelle mesure cette diversité de registres est utilisée pour répondre à l'objectif de la continuité didactique..

L'expression "registres utilisés" est à prendre au sens large, c'est-à-dire "représentations présentes dans les manuels". La question attachée étant celle de l'exploitation (ou non) de ces représentations en tant que registre, c'est-à-dire leur mise en œuvre dans la construction et/ou la résolution des équations différentielles dans les situations extra-mathématiques.

I.2.1. En mathématiques

a) Les registres identifiés

L'étude des équations différentielles dans les manuels fait intervenir plusieurs registres de représentation sémiotique au sens de Duval (1993 ; 1995) :

Registre de la langue naturelle (RLN) : c'est le registre (en général donné sous forme d'un texte) dans lequel sont présentées les équations différentielles ou les situations qui les introduisent.

Registre algébrique ou symbolique (RS) : c'est le registre qui permet de représenter les équations différentielles sous forme de symboles (mathématiques) et des relations entre ces symboles.

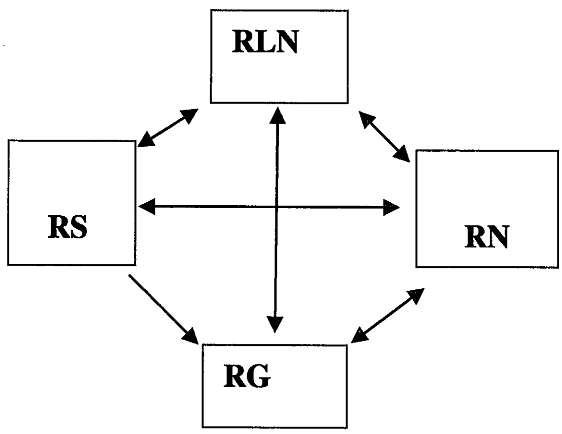
Registre numérique (RN) : c'est le système sémiotique qui permet une représentation des données sous forme numérique (nombres). Dans cette catégorie, nous avons inclus les tableaux des valeurs numériques.

registre graphique (RG) : Ce système se traduit par une représentation sémiotique dans un graphique.

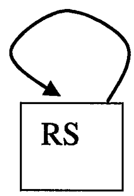
Pour cette partie, l'analyse consiste à identifier les registres les plus utilisés (dominants), puis à examiner le rôle joué par ces registres dans le traitement des situations extra-mathématiques. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur les trois activités cognitives proposées par Duval (1995) : formation, traitement et conversion.

b) Le schéma général

Dans notre analyse, nous nous sommes appuyés sur le schéma suivant, construit en fonction de principaux registres qui apparaissent.



Les flèches correspondent à une activité cognitive au sens de Duval. Le passage d'un registre à un autre (exemple RS ➔ RN) traduit l'activité de conversion ou celle de formation. Nous avons utilisé une flèche en boucle pour signaler une activité de traitement.



Signalons aussi que le niveau de positionnement des quatre points du diagramme (RLN, RS, RG, RN) n'indique pas forcément l'ordre d'apparition des registres dans le texte. Des chiffres et le sens des flèches sont utilisés pour indiquer l'ordre d'apparition.

I.2.2. En physique

Dans les ouvrages de physique, le recours à des représentations complémentaires est général. Cela va des illustrations (photographies ou dessins) de dispositifs expérimentaux, aux expressions formelles, en passant par des tracés graphiques de points expérimentaux ou de courbes théoriques et par des schémas très codifiés.

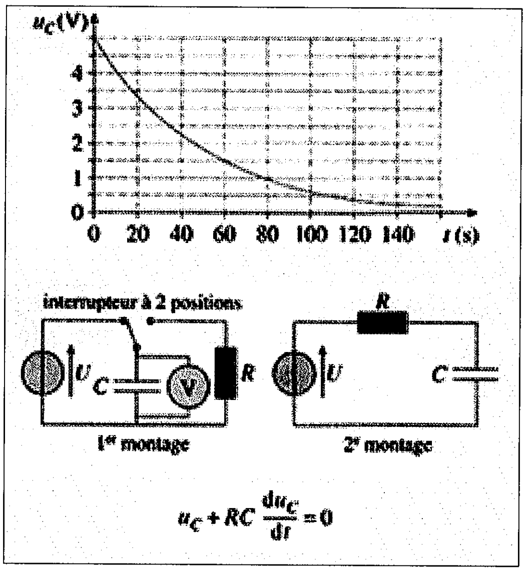


Figure 5: extrait d'un manuel scolaire montrant sur une même page différents modes de représentation

Pour autant, la question se pose de leur réelle exploitation et de leur mise en relation dans une activité de modélisation. Nous sommes donc bien dans une problématique de "registres de représentation", le passage de l'expérience (du moins sa représentation) à la modélisation mathématique (sa représentation formelle) étant le point clé de notre problématique.

a) Les registres identifiés

Au sens de Duval, nous avons donc relevé :

Registre de la langue naturelle (RLN)

Registre numérique (RN) : ce sont les tableaux de valeurs, ou valeurs isolées, qu'elles soient expérimentales ou calculées.

Le registre symbolique (RS) : ce sont les relations (formules) mathématiques ou physico-mathématiques.

Le registre graphique (RG) : ce sont les courbes, qui en physique peuvent être expérimentales, théoriques, mais aussi mixtes (superposition des deux).

Nous avons été amenés à identifier un autre registre que nous avons qualifié d'illustration (RI), à défaut d'autre terme plus approprié : ce sont les schémas et photographies.

De manière générale, beaucoup d'illustrations de ce type apparaissent dans les manuels de physique et, bien que les schémas soient hautement symboliques, nous les avons mis dans le registre des illustrations et avons réservé le RS au registre des relations physico-mathématiques.

b) Les mises en relations

La mise en relation des différents registres ci-dessus correspond à un certain nombre de mises en relation bien connues :

(RI) → (RN) : relevé de mesures sur un dispositif (photographié ou schématisé)

(RI) → (RS) : élaboration d'un modèle physico-mathématique s'appuyant sur la base d'une schématisation

(RN) → (RG) : tracé de points expérimentaux (sens déduction)

(RG) → (RN) : lecture sur un graphique (déduction)

(RS) → (RG) : tracé d'une courbe selon un modèle (sens déduction)

(RG) → (RS) : *inférence* d'un modèle depuis une courbe expérimentale

(RS) → (RN) : calcul de valeurs à partir d'un modèle

(RN → (RS) : *inférence* d'un modèle à partir de données numériques.

(RI) → (RG) : illustration directe, sous forme graphique, d'un résultat expérimental.

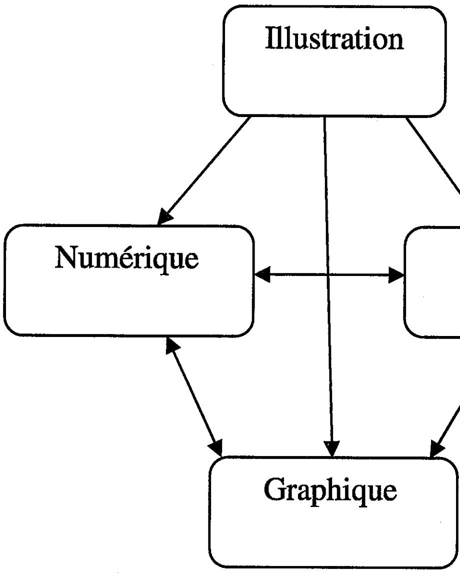
Remarques :

* les passages RN → RS et RG → RS sont essentiellement rencontrés dans des cas de proportionnalité ou de modélisation par une droite affine.

* Le passage RI → RG est de l'ordre de la phénoménographie (*Martinand , Durey, Beaufils 1998,*), de plus en plus répandue avec l'informatisation des expériences.

c) Schéma général

Le schéma général que nous avons adopté comme grille synoptique des registres et de leur mise en relation dans l'analyse des manuels est, *in fine*, le suivant :



I.3. Continuité didactique du point de vue de la praxéologie

La continuité didactique se joue enfin sur les activités données aux élèves, notamment sous forme d'exercices ou de problèmes.

I.3.1. Dans les manuels de mathématiques

Pour l'étude des équations différentielles dans les manuels, nous avons ainsi relevé de nombreuses tâches telles que :

- résoudre une équation différentielle de type $y' = ay$ ou $y' = ay + b$, (sans condition initiale),
- déterminer la solution générale de l'équation différentielle (sans condition initiale),
- déterminer les fonctions f, solutions de l'équation différentielle (donnée)
- déterminer / préciser la solution particulière d'une équation différentielle vérifiant une condition $y(x_0) = y_0$,
- etc.

En tenant compte de notre choix qui consiste à n'analyser que des tâches de types extra-mathématiques (situations de modélisation) issues de la physique, l'organisation mathématique que nous considérons est une organisation mixte au sens de Chevallard. Il nous a paru important d'analyser les types de tâches proposés, la technique associée et le champ disciplinaire dont relève cette technique, ainsi que la technologie et la théorie associées.

Par exemple, dans le cas de l'étude d'une situation de modélisation en mécanique où l'équation différentielle est de la forme $dx/dt + kx = 0$, il s'agit de dire comment on fait pour la résoudre, Quels sont les types de techniques qui sont privilégiés : mathématiques, physique ou les deux à la fois ? De même pour la technologie et la théorie.

Nous qualifions par (T1) tout type de tâche qui conduit à la détermination d'une équation différentielle.

La plupart des tâches que nous avons rappelées ci-dessus mettent en scène une équation différentielle (E) et une ou des fonctions *f* candidates à être solution de (E) : (E) $\Leftrightarrow$ f. Le sens (E) $\Rightarrow$ f est celui de la résolution algébrique. Nous avons appelé (T2) le type de tâche répondant à ce sens. Par contre le sens f $\Rightarrow$ (E) est celui de la vérification, c'est-à-dire qu'une fonction étant donnée, il s'agit de vérifier si oui ou non elle est solution de l'équation différentielle. Nous avons appelé (T3)[20] tout type de tâche relevant de cette implication.

Nous avons appelé (T4) le type de tâches relatif à la résolution numérique des équations différentielles.

En résumé, nous avons identifié quatre types de tâches qui sont tous associés à la résolution des équations différentielles:

- (T1) : déterminé une équation différentielle
- (T2) : résoudre (algébriquement) une équation différentielle
- (T3) : vérifié qu'une fonction est solution d'une équation différentielle
- (T4) : résoudre (numériquement) une équation différentielle

Le type de tâches (T1) peut être qualifié de *mixte* car on doit se servir d'un texte issu de la physique pour trouver l'équation différentielle mathématique.

Nous qualifions les types de tâches (T2) et (T3) *d'algébrique* puisque leur accomplissement s'appuie sur une manipulation algébrique. Quant à la tâche (T4), elle est à la fois algébrique (du fait de la représentation de l'équation différentielle : expression algébrique) et numérique (si l'on se réfère à la nature des solutions de l'équation différentielle : valeurs numériques)

20 (T2) peut être considérée comme une variante de (T1) ; Pour (T2) l'équation différentielle et l'une de ces solutions sont proposées. Il reste juste à vérifier leur conformité.

I.3.2. Dans les manuels de physique

Parallèlement à l'analyse des manuels de mathématiques, nous nous sommes intéressés dans les manuels de physique, à l'organisation praxéologique relative aux tâches associées à l'étude des équations différentielles du premier ordre. Il s'agit de dire quels sont les types de tâches auxquelles sont associées les équations différentielles, de préciser la ou les technique(s) sous-tendue(s) : mathématiques, physique ou les deux à la fois ; de même pour la technologie et la théorie.

En référence au programme officiel, et en référence aux exercices corrigés/exercices-types, etc. des manuels scolaires, aux sujets de bac, on trouve de nombreuses tâches pouvant se ramener à quelques types :

a) Type de tâches relatif à l'établissement d'une équation différentielle.

(T1) : établir une équation différentielle.

Ce type de tâche apparaît sous plusieurs formulations ; nous en donnons les deux principales :

T1a : établir l'équation différentielle régissant telle grandeur (pas d'autre indication)

T1b : montrer que la grandeur est régie par une équation différentielle correspondant à une forme donnée dans le texte

b) Type de tâches relatif à la résolution d'une équation différentielle

(T2) : résoudre algébriquement une équation différentielle[21]

(T3) : vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.

T3a : la solution est donnée sous forme générique (il faut déterminer les constantes en jeu).

T3b : la solution générale est donnée explicitement (avec les symboles de physique) et il faut déterminer la solution particulière (condition initiale[22])

T3c : la solution particulière est donnée explicitement.

(T4) : résoudre (numériquement) une équation différentielle en utilisant la méthode d'Euler.

c) Autre type de tâches connexes

(T5) : déterminer analytiquement une propriété de la solution :

T5a : le temps caractéristique : expression et dimension

---

21 Non conforme au programme de physique, mais trouvé dans certains manuels scolaires.

22 Avec continuité de la tension aux bornes du condensateur pour le cas RC.

T5b : la pente à l'origine

T5c : valeur limite quand t tend vers l'infini.

T5d : valeur limite pratiquement atteinte quand $t \geq 5\tau$

(T6) : travailler sur une représentation graphique

T6a : tracer l'allure de l'évolution de la grandeur.

T6b : reconnaître un graphique donné

T6c : exploiter un graphe donné de l'évolution de la grandeur : détermination du temps caractéristique, de la valeur limite.

(T7) : calculer une autre grandeur par dérivation[23]

I.4. Synthèse

De façon générale, pour chaque axe de notre grille d'analyse, notre attention se porte sur l'articulation mathématiques-physique. Le point crucial dans la continuité didactique porte donc sur les éléments permettant la transition entre les deux disciplines. Le but est de préciser les tâches[24] de transition entre les mathématiques et la physique et de relever à chaque fois les points de continuité ou de discontinuité/fausse continuité.

Les Schéma 1 et Schéma 2 peuvent alors être interprétés dans un schéma plus général que nous présentons ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\text{1) Physique} \arrow[d, "\text{PM}"'] & \text{4) Physique} \arrow[l] \\
\text{2) Maths} \arrow[r] & \text{3) Maths} \arrow[u, "\text{MP}"']
\end{tikzcd}$$

Schéma 3 : Processus de transition maths-physique

Dans les manuels, les situations de modélisation qui nous intéressent sont celles qui sont issues de la physique (1). Elles sont données généralement sous forme de modèle physique

---

23 Calcul de l'intensité i(t) dans le cas RC

24 Le mot « tâche » est à prendre au sens d'une action à exécuter, soit par l'enseignant lui-même, soit par l'élève.

(domaine pseudo-concret). Leur traitement passe par une traduction mathématique (modèle mathématique). C'est à ce niveau que l'on doit examiner la manière dont la transition physique-mathématiques (PM) se fait. Une deuxième transition apparaît lorsqu'il s'agit d'interpréter le résultat mathématique. C'est la transition (MP) qui doit permettre de répondre normalement à la question de départ posée dans le cadre de la physique.

Précisons que suivant les situations et le cadre de rationalité de départ, l'ordre des chiffres du cycle (1, 2, 3, 4) peut apparaître inversé ((3, 4, 1, 2) par exemple) ou bien incomplet ((1, 2, 3) par exemple).

II. Analyse des manuels de mathématiques

Notre analyse est centrée sur la modélisation et les points de jonction entre mathématiques et physique. Cette analyse comporte à la fois un volet quantitatif (pour caractériser la place des équations différentielles dans les manuels) et qualitatif (pour mettre en évidence l'articulation les jeux de cadres de rationalité présents dans les modélisations). Elle (l'analyse) est complétée selon le point de vue des registres de représentation et le point de vue des types de tâches.

II.1. Présentation générale des manuels

Nous avons choisi d'analyser 8 ouvrages parus chez 5 éditeurs en fonction de leur utilisation fréquente dans les lycées. Nous donnons ci-dessous la liste de ces ouvrages :

- Nathan : collections Hyperbole et Transmath,
- Hachette : collections Déclic et Repère,
- Bordas : collections Indice et Fractale,
- Bréal : IREM de Poitiers
- Didier : collection Math'x.

Selon le manuel considéré, l'étude des équations différentielles se fait soit en un chapitre, celui de « la fonction exponentielle » (Déclic, Repère, Transmaths, Fractale, Bréal) soit en deux chapitres qui sont, « fonction exponentielle » et « étude de l'équation y' = $ay + b$ » (Hyperbole, Indice, Math'x).

La plupart des ouvrages présentent une structuration des chapitres en 4 parties que nous appellerons : Activités, Cours, Travaux dirigés et Exercices et problèmes.

Certains ouvrages (Hyperbole) présentent des textes scientifiques historiques ou relevant de l'actualité, pour montrer l'importance des notions mathématiques étudiées dans le chapitre. C'est donc une occasion de faire un lien entre les mathématiques et les autres sciences. D'autres ouvrages présentent des « préliminaires », dans le but de vérifier des connaissances antérieures jugées utiles dans le chapitre (Déclic). Dans le cas de l'étude des équations différentielles, les tests portent essentiellement sur le calcul des dérivées des fonctions, l'approximation affine ou sur les suites.

II. 2. Analyse descriptive (quantitative) : place des équations différentielles

II.2.1. Méthodologie

Dans les manuels de mathématiques, il s'agit de comparer la place accordée aux sujets de physique au regard d'autres disciplines (médecine, chimie, biologie, économie) et à l'ensemble des activités portant sur les équations différentielles. Plus spécifiquement, nous avons relevé les thèmes a priori en relation avec le programme de physique : radioactivité, chute des corps et circuit RC, RL. Nous avons donc relevé les champs disciplinaires d'introduction des équations différentielle et effectué un décompte des situations de modélisation issues des domaines de la physique dans les différentes parties des ouvrages.

II.2.2. Champs de première apparition

La partie « Activité » des manuels, nous renseigne sur les domaines qui sont convoqués pour présenter la première fois les équations différentielles du premier ordre. Plusieurs domaines (champs disciplinaires) sont utilisés à travers des situations de modélisation. La physique est la discipline la plus sollicitée, avec 6 activités, comme le montrent les données suivantes :

- Physique (6) : (Radioactivité 3, Electricité 1, Mécanique 1, Pression atmosphérique 1)
- Médecine (2)
- Démographie (2)

- Chimie (1)
- Biologie (1)

II.2.3. Nombre de situations de modélisation issues des domaines de la physique

Les résultats de cette partie de notre analyse sont présentés dans un tableau où les cellules sont remplies par des écritures de type a/b/c où

"a" désigne le nombre de situations de modélisation issues de la physique qui ne portent que sur l'un des trois domaines cités plus hauts : radioactivité, électricité et mécanique (REM),

"b" désigne le nombre total de situations de modélisations faisant intervenir les équations différentielles, sauf les situations REM,

"c" désigne le nombre total d'activités intra-mathématiques sur les équations différentielles.

Ouvrage : Éditeur/collection	Partie de manuel				
	Activité	Cours	TD/ TP	Exercices	Total
Bordas/Fractale (2002)	0/0/2	0/0/3	2/1/0	2/2/24	4/3/29
Bordas/ Indice (2002)	2/1/0	0/0/2	0/2/0	4/6/23	6/9/25
Hachette/Déclic (2005)	0/0/3	0/0/1	1/0/0	3/3/22	4/3/26
Hachette/Repère (2006)	1/1/0	0/0/2	0/0/0	6/3/34	7/4/36
Nathan/ Hyperbole (2006)	1/2/4	0/0/4	2/1/0	5/8/43	8/11/51
Nathan/ Tansmath (2006)	0/0/2	0/0/0	1/2/2	2/1/17	3/3/21
IREM/ Bréal (2002)	0/2/1	1/0/3	0/0/0	2/0/9	3/2/13
Didier/ Math'x (2006)	1/1/1	0/0/1	0/2/1	6/7/14	7/10/17
Total	5/7/13	1/0/16	6/8/3	30/30/186	42/45/218

Tableau 9 : nombre de situations de modélisation issues des domaines de la physique (radioactivité, électricité, mécanique) dans des manuels de mathématiques

Dans le tableau ci-dessus, la disparité sur le nombre total trouvé dans chacune des 4 parties qui structurent les manuels donne des indications sur le statut accordé aux équations différentielles. On trouve (quasiment) autant de situations intra- qu'extra-mathématiques (13 contre 12) dans la partie « activités ». Ce rapport traduit à la fois l'importance accordée aux situations de modélisation pour introduire les équations différentielles et la fonction exponentielle et la place des mathématiques dans l'étude des situations de modélisation.

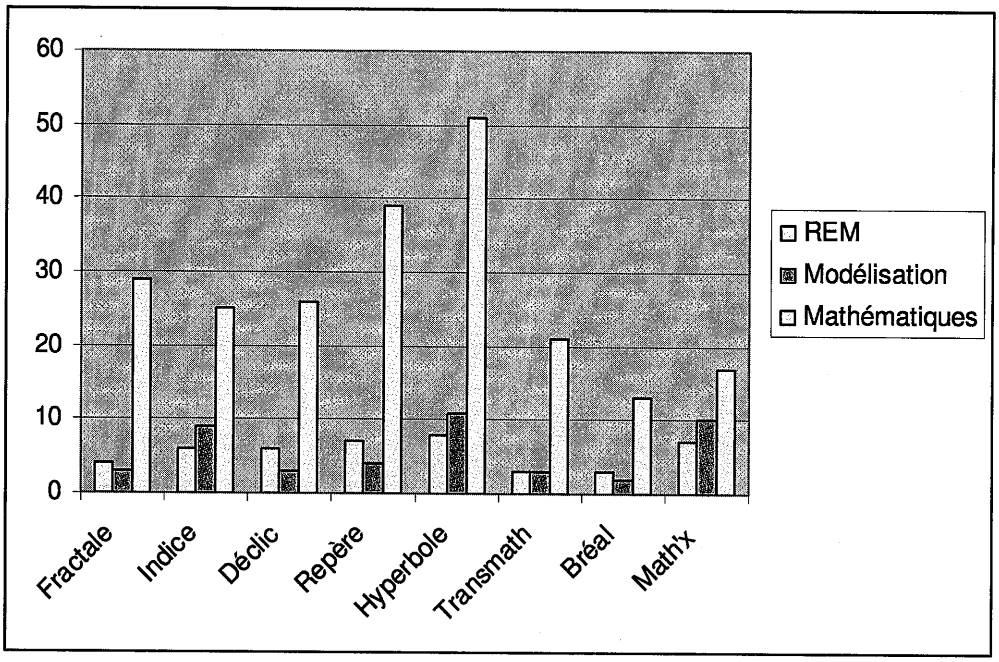
On constate aussi que les domaines REM sont essentiellement les plus sollicités. La domination des situations issues des domaines REM est sans doute en rapport avec les manuels de physique (comme nous le montrons plus loin) qui ne traitent les équations du premier ordre que dans ces trois domaines. Cela peut être aussi interprété comme une traduction de la volonté des programmes de mathématiques et du document d'accompagnement desdits programmes. En effet, parmi les trois domaines de la physique constituant REM, on a noté la prédominance des situations de radioactivité. D'ailleurs, pour traduire la mise en synergie possible entre l'enseignement des mathématiques, des sciences physiques et des sciences de la vie et de la Terre, les exemples proposés par le groupe d'experts des programmes scolaires (GEPS) sur les situations de modélisation portent sur la radioactivité (loi de décroissance radioactive) et la mécanique classique (chute d'un corps dans un fluide).

On peut supposer que dans cette partie, le caractère *outil* est privilégié par rapport à celui d'*objet*. En effet, comme nous l'avons montré plus loin, les situations de modélisation sont le lieu où les équations différentielles sont utilisées comme outil (de modélisation). Mais ce rôle apparait dans certaines situations intra-mathématiques, surtout celles qui sont destinées à introduire la fonction exponentielle.

Par contre, dans le cours, c'est le caractère *objet* qui est mis en avant. Les exemples d'application sont quasiment tous intra-mathématiques (16 sur 1). Mais cette configuration est inversée dans la partie « TD/TP » où l'on note 14 situations de modélisation contre 3 intra-mathématiques. Comme dans la partie « activités », le fait de considérer plus de situations extra-mathématiques dans cette partie peut être aussi considéré comme une façon de montrer l'importance de mathématiques dans les autres domaines. Ce constat se confirme au regard du nombre total des situations extra-mathématiques en « exercices/problèmes ». On compte 60 situations de modélisation contre 186 exercices intra-mathématiques.

Il faut signaler que cette description que nous venons de présenter suivant les principales parties qui structurent les manuels est générale ; certains manuels sont loin de s'y conformer. Par exemple, dans les manuels Repère et Déclic, on ne note aucune situation de modélisation (partie « activité ») pour introduire la notion d'équation différentielle.

A partir du Tableau 9, nous regroupons dans le graphique ci-dessous le nombre total de chaque catégorie de situations qui apparaissent dans les 8 manuels. Ce sont des situations intra-mathématiques et extra-mathématiques (modélisation). Dans cette deuxième catégorie nous précisons le nombre de situations qui relèvent des domaines REM.



Graphique 1 : Comparaison des situations REM, modélisation[25] et mathématiques

Les manuels qui traitent les équations différentielles en deux chapitres proposent beaucoup plus de situations de modélisation que les autres manuels. Parmi ces situations, on constate que les domaines REM (radioactivité, électricité et mécanique) représentent presque la moitié de l'ensemble total des situations de modélisation, soit 42 situations sur les 87 proposées.

Finalement, la différence entre le nombre total des situations intra-mathématiques (218) et le nombre total de situations extra-mathématiques (87) montre que la part accordée aux situations de modélisation n'est pas négligeable.

[25] Il s'agit des situations de modélisation sauf celles qui portent les domaines REM.

II.2.4. Bilan

Au regard du Tableau 9 et du Graphique 1, on constate une domination relative des situations intra-mathématiques par rapport aux situations extra-mathématiques. Cette domination peut expliquer le statut accordé aux équations différentielles dans le programme actuel de mathématiques ; en effet, elles constituent à la fois un objet mathématique (nécessitant un traitement mathématique) et un outil pour l'introduction et le traitement de fonction exponentielle. Cependant, les situations extra-mathématiques sont plus nombreuses dans la partie « TD/TP », qui semble être le lieu d'application de la notion « équation différentielle ». Les situations issues des domaines de la physique (REM) sont les plus présentes. On peut alors s'interroger sur la manière dont l'articulation entre les mathématiques et la physique est prise en compte dans les faits pour l'enseignement des équations différentielles.

II.3. Le Jeu des cadres de rationalité

II.3.1. Méthodologie

Analyser la place accordée à l'objet "équation différentielle" dans le cadre de la modélisation des phénomènes physiques c'est aussi, comme nous l'avons indiqué dans la problématique générale, relever les éléments de rationalité (explicites et implicites) qui permettent le passage de la réalité pseudo-concrète physique au(x) modèle(s) symbolique(s), de l'équation différentielle du physicien à l'équation différentielle du mathématicien et le cas échéant, du traitement (mathématique) de l'équation différentielle au retour à la situation de départ (physique).

Il s'agit donc d'une part de relever ce que nous appelons le *champ de départ* de la situation à traiter (cdd) qui est le champ de référence, et le *champ de traitement* de cette situation (cdt) et d'autre part, d'analyser les transitions cdd ➔ cdt et cdt ➔ cdd qui correspondent donc à des changements de cadre de rationalité/d'intelligibilité en examinant la nature des questions, les glissements sémantiques, les changements de statut, etc., à l'œuvre dans les transitions.

Nous présentons ici notre analyse des ouvrages de mathématiques à propos de situations de modélisation sur des sujets relevant par ailleurs du programme de physique : circuits RC et RL (en électricité), radioactivité (loi de décroissance) et la chute libre ou la chute d'un corps dans un fluide. De ce point de vue, nous avons, dans le même temps, porté notre attention sur la "compatibilité" avec l'enseignement de physique, qu'il s'agisse de la forme (présentation des données physiques) ou du fond (réalisme des situations au regard du programme de physique de terminale).

II.3.2. Analyse de situations de modélisation "physique"

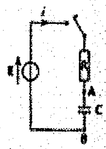
a) Thème 1 : "Circuit RC"

- **Manuel Collection Hyperbole 2006, p. 45**

Activité 3 — **Charge du condensateur d'un dipôle (R, C)**

Faire le lien avec le programme de physique

Un circuit comprend un générateur de force électromotrice E un dipôle (R, C) (association en série d'un condensateur de capacité C et d'un conducteur ohmique de résistance R), et un interrupteur.



À tout instant $t \geqslant 0$, en secondes :

- on note $i(t)$ l'intensité en ampères dans le circuit ;
- la charge $q(t)$ du condensateur et la tension $u(t)$ à ses bornes sont liées par la relation $q(t) = Cu(t)$;
- la tension aux bornes du générateur est égale à la somme des tensions aux bornes du générateur et de la résistance : $u(t) + Ri(t) = E$;
- la charge du condensateur et l'intensité du courant produit lors de la fermeture de l'interrupteur sont liées par la relation $i(t) = \frac{dq}{dt}(t) = q'(t)$.

1 Expression de $q(t)$

a) Expliquer pourquoi la charge q du condensateur est telle que $Rq' + \frac{1}{C}q = E$.
b) Résoudre cette équation différentielle.
c) On suppose que le condensateur est sans charge initiale, c'est-à-dire que : $q(0) = 0$. Vérifier que $q(t) = EC\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ avec $\tau = RC$.

2 Interprétation de la constante de temps

Le produit $\tau = RC$ est homogène à une durée ; il est appelé constante de temps. τ donne l'ordre de grandeur de la durée de charge du condensateur.

a) Étudier la limite de q lorsque t tend vers $+\infty$. Cette limite Q trouvée est la charge finale du condensateur (au bout d'un temps infini).
b) À quel pourcentage, arrondi à l'unité, de sa charge maximale Q, le condensateur est-il chargé après une durée de charge égale à τ ? égale à 5τ ?

3 Étude de la fonction q

$\mathscr{C}$ est la courbe représentant q dans un repère orthogonal (*unités graphiques : 1 cm pour 50 s en abscisses et 1 cm pour 1 V en ordonnées).*
a) Dresser le tableau de variation de la fonction q.
b) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Donner l'abscisse du point d'intersection de T avec la droite d'équation $y = EC$.
c) Tracer T, $\mathscr{C}$ et son asymptote, dans le cas où $C = 1$ F, $R = 100\ \Omega$ et $E = 5$ V pour $t \in [0 ; 5\tau]$.

La charge et la décharge d'un condensateur constituent le principe, par exemple, du flash d'un appareil photographique. Ce dispositif met à profit l'énergie électrique emmagasinée par un condensateur ($\tau = 10$ s) qui constitue ainsi une réserve d'énergie. Lorsqu'on appuie sur le poussoir, le condensateur se décharge dans la lampe ($\tau = 10$ ms).

4 Étude de l'intensité i

Γ est la courbe représentant i dans un repère orthogonal (*unités graphiques : 1 cm pour 50 s en abscisses et 1 cm pour 0,01 A en ordonnées).*
a) Expliquer pourquoi $i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$.
b) Dresser le tableau de variation de la fonction i.
c) Déterminer une équation de la tangente T' à Γ au point d'abscisse 0. Donner l'abscisse du point d'intersection de T' avec l'axe des abscisses.
d) Tracer T' et Γ, dans le cas où $C = 1$ F, $R = 100\ \Omega$ et $E = 5$ V pour $t \in [0 ; 5\tau]$.

Champ de départ

L'étude de cette situation de modélisation est proposée comme un TD. Le champ de départ est celui de l'électricité dont le thème est le circuit RC : charge du condensateur d'un dipôle (R, C). Après une description des éléments qui composent le circuit électrique, le texte fournit des informations traduisant la situation à la fois dans un modèle "physique" et un modèle symbolique :

- la relation entre la charge du condensateur et la tension à ses bornes est donnée par la formule $q(\mathrm{t}) = Cu(t)$, ainsi que la formule donnant l'intensité en fonction de la charge $i(t) = \mathrm{d}q(t)/\mathrm{dt}$

- selon les conventions d'orientation définies sur le schéma, la relation les différentes tensions entre différents points du circuit est donnée (loi d'additivité des tensions[26]) : $u(t) + Ri(t) = E$;

La situation à étudier conduit à une équation différentielle qui est déjà donnée dans le texte.

la relation $u(t) + Ri(t)$ présente une dissymétrie d'écriture vis-à-vis des dipôles R et C. De même, on peut s'interroger sur la précision donnée quant à l'unité de la seule intensité...

Passage du champ de départ au champ de traitement

Traitement analytique (mathématique) :

Les questions 1, 3.a et 4.a, b, c relèvent du traitement mathématique, malgré la présence de grandeurs physiques dans les expressions des fonctions numériques à étudier.

Pour la question 1, il s'agit de trouver, à partir des informations données avant, l'équation différentielle modélisant la situation, puis de la résoudre.

La question 1.a) demande une explication sur la charge du condensateur. La formulation de cette question "expliquer pourquoi la charge..." nous paraît ambiguë. Elle peut conduire à penser que la réponse attendue s'appuiera sur des éléments du modèle physique du fait que le champ de départ de cette situation est extra-mathématique. En réalité, il s'agit de retrouver,

[26] la tension aux bornes du générateur u est égale à la somme des tensions aux bornes du condensateur u_c (et non du générateur comme annoncé dans le texte) et de la résistance u_R

par un jeu de substitution, l'équation différentielle donnée à partir des différentes formules proposées.

Il suffit donc de remplacer, dans la relation *u(t)* + *Ri(t)* = *E*, la tension $u(t)=\frac{q(t)}{C}$ et $i(t)=q'(t)$

On obtient normalement : pour tout t, $Rq'(t)+\frac{1}{C}q(t)=E(t)$. On peut se demander pourquoi l'explicitation du temps a disparu de l'équation $Rq'+\frac{1}{C}q=E$. Nous pensons qu'il s'agit d'un abus de notation qui apparaît fréquemment en mathématiques lors de l'étude des équations différentielles. Il trouve son origine dans la manipulation de certaines propriétés des fonctions. En effet, étant donné deux fonctions de variable réelle, *f* et *g*, on sait que :
Dire que *f* = *g* équivaut à dire que : $\forall$ x $\in$ I, *f(x)* = *g(x)*, I étant un intervalle de R.

De même, si f' est la fonction dérivée de f : $\forall x \in I$, un intervalle de R, $f'(x) = kf(x) \Leftrightarrow f' = kf$

On obtient une égalité fonctionnelle (entre fonctions) qui peut être traduite par un symbolisme particulier : *y' = ay*. Cette notation de l'équation différentielle emploie les symboles « *y* », comme symbole générique pour désigner une fonction *f* mais pas nécessairement *f(x)*, c'est-à-dire, la valeur de cette fonction en x. On a coutume d'écrire *y* = *f(x)* et donc *y'*= *f'(x)*, on peut donc penser qu'il s'agit de ce « *y* ».

Le passage de a) à b) est intéressant : il y a changement de statut de la relation qui, dans le a) est une relation entre les tensions entre différents points d'un circuit puis, en b) est une équation mathématique, qui plus est, différentielle. Ce changement de statut ne doit pas être perçu comme un glissement de vocabulaire (en particulier limitant la porté de l'adjectif "différentiel" à la présence d'une dérivée) mais bien comme le fait que l'on a été capable d'écrire une équation portant sur des grandeurs que l'on ne connaît pas.

La question 3.a) prolonge le traitement de la fonction (résolution de l'équation différentielle) obtenue en 1.a) en proposant l'étude de ses variations ; de même pour les questions 4.a, b qui diffèrent des premières citées par la nature de la grandeur (intensité du courant) mais ne changent pas la nature de la fonction (fonction exponentielle).

Dans la partie 4, on peut de nouveau s'interroger sur la question "expliquer pourquoi $i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$"... On peut penser que la réponse à cette question s'appuie sur des explications relevant du modèle physique de l'intensité ; en réalité, il s'agit d'une dérivation de la fonction (la charge) obtenue en résolvant l'équation différentielle.

Traitement graphique : (mathématique)

Les questions 3c et 4d demandent le tracé de courbes des fonctions obtenues.

L'exercice est fini une fois tracée la courbe. On aurait pu s'attendre à une exploitation de ces courbes pour pouvoir interpréter certains aspects du phénomène étudié.

Retour au champ de départ

Le traitement de la question 2 permet de mettre en œuvre des connaissances mathématiques et physiques. En 2.a, on demande la détermination de la charge finale du condensateur en précisant qu'il s'agit d'une limite de fonction en $+\infty$. La question 2.b vient sans doute pour donner un sens à cette limite. L'élève sait d'après son cours de physique que, pour charger un condensateur, on n'a pas besoin d'un temps "infini" qui est une notion difficile à appréhender en référence à la pratique quotidienne. On ne peut donc pas l'imaginer comme étant très long (plusieurs semaines, années ou siècles) au risque d'abîmer les appareils.

Il est donc intéressant de faire travailler l'élève sur le sens physique de cette notion de limite. La question 2.b conduit à une interprétation du produit $\tau = RC$ appelé constante de temps (qui donne l'ordre de grandeur de la durée de charge du condensateur). On peut considérer que c'est une vérification d'un résultat de cours de physique :

« Le condensateur est chargé à 63% de sa valeur maximale au bout d'un temps environ égal à τ et en pratique, on admet que la charge du condensateur est terminée (99% de sa valeur maximale sont atteints) au bout d'une durée voisine de 5τ ».

Pourtant, on pouvait bien s'attendre à ce qu'on revienne à ce résultat après 3.b et 3.c, ceci dans le but de confronter deux pratiques différentes sur l'obtention graphique du temps caractéristique (méthode des physiciens) et le calcul analytique de cette grandeur (pratique du mathématicien).

Il serait aussi intéressant de placer cette question après le tracé de la courbe de q, c'est-à-dire après la question 3. La construction par la méthode du physicien pouvant servir de conjecture et la méthode analytique de validation mathématique.

Remarque :

Nous avons constaté que, pour l'essentiel, cet exercice porte sur une étude de la fonction exponentielle. La particularité réside ici dans le fait que l'équation différentielle n'est pas sous une forme mathématique "canonique" ($y' = 2y + 5$ par exemple), mais sous une forme à la fois "générique" (les paramètres n'ont pas de valeurs) et particulière (puisque les paramètres R, C E ne sont pas "mathématiques").

Il y a aussi une petite "subtilité" dans l'énoncé qui sépare en 2° et 3° l'étude de la charge au cours du temps, et intitule la question 2 "interprétation de la constante de temps" alors que la grandeur "constante de temps" n'est pas définie (hormis un texte dans la marge, hors exercice).

Mais l'étude de cette question permet de passer du champ de traitement mathématique au champ "physique" de départ. On aurait bien voulu que cette question soit élargie tout de suite à une étude graphique.

Manuel Collection Indice, Exercice 101, p. 98

101 Circuit électrique
Un circuit est constitué d'un condensateur de capacité $C = 75 \cdot 10^{-6}$ farads, d'une résistance $R = 2 \cdot 10^{4}$ ohms, d'un générateur g et d'un interrupteur.
On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et le générateur délivre alors une tension V.
La tension U aux bornes du condensateur est alors solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (1) :

$$U(t) + RCU'(t) = V(t).$$

On suppose que $V(t) = 6\,e^{-\frac{2}{3}t}$ où t est exprimé en secondes.
De plus la charge initiale du condensateur impose la condition :

$$(2) : \ U(0) = \frac{1}{3}V(0).$$

a. Démontrer que la fonction U définie sur $[0\,;+\infty[$ par $U(t) = (4t+2)\,e^{-\frac{2}{3}t}$ vérifie la condition (2).
b. Montrer que la fonction U est solution de l'équation différentielle (1).
c. Étudier le sens de variation de U et calculer la limite de U en $+\infty$.
d. Démontrer que l'équation $U(t) = 10^{-3}$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;20[$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 1 seconde.
e. L'appareil mesurant $U(t)$ ne détecte pas les tensions inférieures à 10^{-3} volts.
Pour quelles valeurs de t ne détecte-t-il plus la tension $U(t)$?

Champ de départ :

Cet exercice a comme champ de départ l'électricité, et plus précisément le circuit RC. On peut remarquer que le texte fournit déjà l'équation différentielle qui régit le phénomène. On peut donc considérer que la situation est modélisée dès le départ.

Le texte présente quelques abus de notation et de formulation que nous avons signalés ci-après.

- la phrase d'introduction "…le générateur délivre alors une tension *V*" n'y prépare pas car on ne dit pas que *V* n'est pas une constante (contrairement à *C* et *R*). Pour un élève qui sait ce qu'est un générateur de tension, il pensera que *V* est constante et risque de ne pas comprendre ensuite la fonction exponentielle donnée pour *V(t)*.

- Il est particulièrement étonnant de voir un générateur délivrer une tension en exponentielle décroissante. Une telle situation ne se rencontre jamais, car cela suppose que ce générateur est soit défectueux, soit cesse de fonctionner dès qu'on ferme le circuit.

- Au niveau du vocabulaire, il ne convient pas de dire que le générateur "délivre une tension" (il impose une tension et délivre un courant). Dans le même esprit, la phrase "la charge initiale du condensateur impose la condition ..." est certes mathématiquement correcte. Mais, outre le fait que l'on ne comprend pas pourquoi le condensateur (qui est un récepteur) imposerait sa tension initiale au générateur, la condition est donnée sous forme purement mathématique (et non pas par une spécificité physique).

Passage du champ de départ au champ de traitement

Nous constatons ensuite que l'équation différentielle proposée (second membre non constant) n'est pas au programme de mathématiques de la classe. L'exercice doit donc contenir, comme on le constate effectivement ensuite, un élément / une étape supplémentaire qui en permette la résolution. De sorte que la première question demande simplement de « démontrer » (en fait, vérifier) la conformité de l'expression de U(t) à la relation U(0) = 1/3V(0). La démarche attendue consiste à calculer les valeurs numériques des fonctions U et V en 0 puis de comparer U(0) et V(0)/3. C'est une tâche mathématique –au demeurant triviale– qui est demandée.

De même, les questions b, c et d relèvent d'un traitement purement mathématique. Plus précisément :

vérifier, en calculant l'expression algébrique de U(t) + RC.U'(t), qu'elle est identique à celle de V(t)

On remarquer qu'avant cette question (b), une tâche de transition de type PM pouvait être proposée en demandant aux élèves de déterminer eux-mêmes l'équation différentielle.

Mais "étudier les variations de la fonction U et sa limite en l'infini, appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction U sur l'intervalle [1 ; 20] après avoir exclu l'intervalle [0 ; 1], programmer la fonction U sur la calculatrice pour trouver un encadrement de *t*", comme on le voit, ce sont là des questions que l'on rencontre souvent – en fait, elles sont presque « rituelles » – dans l'étude d'une fonction.

Retour au champ de départ

La dernière question, qui demande d'interpréter le résultat obtenu à la question précédente, propose un retour à la situation physique. Mais ce retour, ambigu du point de vue de la physique, est "symbolique" car on ne sait pas ce que peut être un appareil qui mesure *U(t).* D'ailleurs, *U(t),* au sens strict, est la valeur numérique de la fonction "tension" *U.* Cet appareil n'existe pas.

La question est posée dans le cadre de rationalité de la physique. on peut considérer une première tâche de transition (PM) qui consiste à traduire le problème dans le cadre de rationalité mathématique : il s'agit de se servir de la première phrase pour écrire l'inéquation $U(t) < 10^{-3}$. Dans la question précédente **d)**, un encadrement de α a été demandé, soit $a < \alpha < b$ où a et b sont des valeurs numériques appartenant à l'intervalle [0 ; 20[. Ce résultat aidant, la résolution de l'inéquation $U(t) < 10^{-3}$ utilise exclusivement des connaissances mathématiques comme éléments de rationalité (lecture sur le tableau de variation par exemple). La solution peut être exprimée sous la forme d'un intervalle $t \in]\alpha ; 20[$ ou sous la forme d'un encadrement $\alpha < t < 20$.

Une nouvelle tâche de transition attendue est d'interpréter ce résultat mathématique dans le contexte de la situation. Il s'agit de dire que « pour toute valeur de t comprise entre α (exclu) et 20 (exclu), l'appareil ne détecte pas la tension *U* ».

C'est bien là un retour à la question de départ. Mais ce type de question n'apparaît pas souvent dans les manuels analysés

Par ailleurs, *U(t)* étant la valeur numérique de la fonction *U* en t, la représentation symbolique souhaitée ici pour cette équation différentielle est $U + RC\ U' = V$, en précisant que les tensions *U* et *V* sont fonction de temps. Ceci serait en accord avec les notations adoptées par l'auteur du manuel, surtout qu'en classe l'équation différentielle "standard" d'une équation différentielle du premier ordre est $y' = ay + b$.

Remarque :

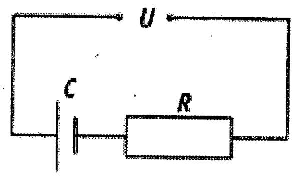
Cet exercice peut être considéré comme une mise en application de la fonction exponentielle : étude des variations, calcul des limites, application du théorème des valeurs intermédiaires.

Autres situations

Nous retrouvons bien d'autres situations dont les jeux entre le cadre de rationalité des mathématiques et celui de la physique peuvent être interprétés en termes de "fausse continuité didactique". On peut citer par exemple le cas de l'exercice 121 p. 113 (Fractale).

121 On considère le circuit électrique ci-contre où C est la capacité du condensateur et R, la valeur de la résistance. U désigne la tension aux bornes du circuit.

En physique, on montre que : $R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = U$ où q, la charge du condensateur, est une fonction du temps qui prend la valeur 0 pour $t = 0$.



1) Écrire l'équation différentielle vérifiée par q.

2) Montrer que $q(t) = CU - CUe^{-\frac{t}{RC}}$.

3) Sachant que l'intensité $i(t)$ vérifie $i(t) = \frac{dq}{dt}$, exprimer $i(t)$.

On peut remarquer qu'ici l'équation différentielle est déjà donnée, mais avec les notations des physiciens cette fois, contrairement aux deux premières situations que nous avons analysées. On peut aussi constater que le schéma donné en accompagnement du texte n'est pas correct : la représentation du générateur (implicite) n'est pas bonne et celle du condensateur est fausse (c'est le symbole d'une pile). La tension U aux bornes du circuit [27]est une constante, ce qui n'est ni dit ni expliqué (le mot « générateur » est absent).

La relation $R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{c}q=U$ donnée dans le texte est une équation différentielle. On peut donc s'interroger sur le sens de la première question. Le traitement de toutes les questions relève du seul domaine des mathématiques. Le retour à la situation de départ n'est pas envisagé.

Il nous semble que l'objectif de l'exercice peut être la manipulation d'expressions mathématiques comportant des symboles de "physique". La phrase « en physique, on montre que … » semble marquer l'intention de développer un travail mathématique. Aucune tâche de

[27] l'auteur, ne veut il pas parler de la tension au borne du "générateur" au lieu de "circuit".

transition n'est demandée. Tel que formulé, cet exercice présente très peu d'intérêt didactique relativement à la mise en valeur de la continuité didactique.

b) Thème 2 : Radioactivité

- **Manuel Collection Déclic 2006 p. 113**

L'expérience montre que, si l'on considère une population de noyaux radioactifs (c'est-à-dire dont le nombre est de l'ordre du nombre d'Avogadro, soit 10^{23}), le nombre moyen de noyaux qui se désintègrent pendant un petit intervalle de temps Δt à partir d'un instant t, rapporté au nombre total de noyaux N(t) présents à l'instant t et au temps d'observation Δt, est une constante λ caractéristique du noyau en question. On peut donc écrire :

$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)} \approx -\Delta\lambda t \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} \approx -\lambda N(t).$$

En prenant la limite de chaque membre lorsque Δt tend vers 0, on obtient $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ ou encore $N' = -\lambda N$.

- En déduire l'expression de N(t) en fonction de t, de λ et du nombre N_0 d'atomes radioactifs présents à l'instant t = 0.
- a) Démontrer qu'il existe un unique réel T, tel que, pour tout réel positif t, on ait :

$$N(t+T) = \tfrac{1}{2} N(t).$$

Le réel T est appelé la **période radioactive** ou demi-**vie** de ce corps radioactif.

- On a pu observer que, pour le carbone 14, on a : $\lambda = 1{,}21 \times 10^{-4}$.
- Déterminer la période en années du carbone 14
- Dans une carrière d'une chaîne volcanique, on a retrouvé des bois carbonisés pris dans des projections de l'un des volcans.

L'étude de ces échantillons de bois fossiles a montré que leur teneur en carbone 14 est égale à 25% de celle des échantillons de bois actuels frais de même masse.

Déterminer l'âge de l'événement volcanique

Champ de départ

Cette situation est donnée comme TD et le champ de départ est celui de la radioactivité. Le texte commence par donner le modèle mathématique d'une expérience déjà réalisée qui se résume par la formule $\frac{\Delta N(t)}{N(t)} \approx -\Delta\lambda t$ (*)[28] ou $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} \approx -\lambda N(t)$

[28] Coquille malencontreuse : l'auteur a bien évidemment voulu écrire "$-\lambda\Delta t$" au lieu de "$-\Delta\lambda t$".

Si on se réfère au texte, on peut s'interroger sur les raisons d'être du signe ≈, puisque l'énoncé dit que le rapport $\frac{\Delta N(t)}{N(t)\Delta t}$ « *est une constante* ». Qu'est ce qui justifie cette approximation ? Est-ce le fait qu'il s'agisse du nombre *moyen* de noyaux qui se désintègrent (n'est pas exactement connu) ou le fait que le rapport n'est qu'approximativement constant ? En tout cas, en plus de l'incertitude sur la nature de l'approximation, on voit bien que le passage de « l'approché » à « l'exact » fait apparaître une contradiction dans les termes.

Il est important de signaler que nous avons retrouvé cette même relation dans d'autres manuels, mais elle est donnée dans la plupart des cas avec une égalité : (Hyperbole 2006, p. 22), (Repère 2006 p. 122) ou (Math'x 2006, p. 132).

Passage du champ de départ au champ de traitement

L'équation différentielle qui régit ce phénomène de désintégration radioactive est donnée à partir de la relation (*). En effet, par passage à la limite (en faisant tendre Δt vers 0) l'on passe de ΔN(t)/Δt à dN(t)/dt.

Mais ce n'est pas aussi simple. On peut s'interroger sur le passage du signe de l'« approximation » à celui de l'égalité et, donc, de « l'approché » à « l'exact ».

On y voit en réalité un passage de la « réalité physique » au modèle mathématique :

1. dans la réalité, on a $\frac{\Delta N(t)}{N(t)} \approx -\lambda\Delta t$, c'est-à-dire qu'on constate que le taux de décroissance relatif du nombre de noyaux par unité de temps est approximativement constant ;

2. dans le modèle on a $\frac{dN(t)}{N(t)dt} = -\lambda$, c'est-à-dire qu'on décide que, primo, le nombre de noyaux présents est supposé être une fonction dérivable du temps (ce qui soulève la question du passage du discret au continu !), et secundo, la dérivée logarithmique de ce nombre de noyaux par rapport au temps est constante.

Il convient de signaler que les élèves de terminale S sont très peu entraînés à l'étude de l'articulation « approché/exact ». Quelques aspects de cette articulation sont repris en analyse.

A cet effet, nous avons retrouvé, dans le même manuel, le chapitre « Dérivées et primitives » (p. 72), qui peut fournir une explication possible à ce passage de l'approximation à l'égalité :

...y = f(x) où f est une fonction dérivable sur un intervalle I

... on a $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; Ce qui signifie que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x)$, où $\varepsilon(\Delta x)$ représente un terme complémentaire qui vérifie : $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$ ...

Lorsque Δx est voisin de 0, $\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$, avec une erreur négligeable devant Δx.

Une équivalence est établie entre les expressions

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x) \quad (1) \qquad \text{et} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \text{ (ou bien } \Delta y \approx f'(x)\,\Delta x) \quad (2)$$

en considérant la quantité $\varepsilon(\Delta x)$ négligeable devant Δx.

En s'appuyant sur les connaissances sur la dérivabilité que nous venons de rappeler, on peut bien imaginer la difficulté que peut éprouver l'élève qui doit transformer simultanément le rapport « $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ » en « $\frac{dy}{dx}$ », et par conséquent l'écriture « ≈ » en « = » ; cela est d'autant plus difficile qu'aucune précaution sur la dérivabilité de la fonction N n'a été prise

Dans la formulation de la première question, on peut signaler un abus d'écriture en parlant de "l'expression de $N(t)$ en fonction de t ...". $N(t)$ exprime déjà cette dépendance à la grandeur t.

Retour à la situation de départ

Le traitement de la première question est mathématique : il s'agit de donner une solution particulière de l'équation différentielle, et pour cela d'appliquer directement un résultat du cours. Le traitement de la question 2 est, lui aussi, exclusivement mathématique. Il s'agit de résoudre l'équation en T : $N(t+T) = \frac{1}{2}N(T)$ (t jouant ici le rôle de paramètre). T est en réalité la durée au bout de laquelle une population de noyaux est divisée par 2. Au passage, on peut remarquer que le mot "période" n'est plus usité en physique dans ce cas.

La question suivante est une simple application numérique. La dernière paraît *a priori* plus intéressante, mais de nouveau ce sont des calculs mathématiques qui sont attendus[29], calcul

29 On peut noter au passage que le choix du taux de 25% n'est sans doute pas innocent, car il permet à l'élève astucieux(se) de donner la réponse (2 demi-vies) sans calcul.

dont la légitimité physique est loin d'être évidente si les élèves n'ont pas eu le cours de physique correspondant[30].

Manuel Collection Hyperbole 2006 p. 22

L'expérience montre que le nombre de noyaux d'un corps radioactif qui se désintègrent pendant un intervalle de temps Δt à partir d'un instant t, rapporté au temps d'observation est proportionnel au nombre de noyaux $N(t)$ présents à l'instant t.

On peut donc écrire $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t)$ où λ est une constante strictement positive caractéristique du noyau étudié.

En mathématiques, on écrit $dN(t) = -\lambda N(t)\,dt$, ou encore $N'(t) = -\lambda N(t)$ **[1]**.

1. La loi de désintégration

On note N_0 le nombre de noyaux d'un échantillon du corps radioactif à l'instant $t = 0$.

a) f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{N_0}N(t)$.

Vérifier que $f(0) = 1$ et établir à l'aide de **[1]**, que $f' = -\lambda f$.

b) En déduire, à l'aide du théorème énoncé au paragraphe **3** page 12, que pour tout réel $t \geq 0$, $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

On dit qu'il s'agit de la **loi (ou équation) de désintégration radioactive.**

2. Étude de la fonction N

a) Étudier le sens de variation de la fonction N sur $[0\,;+\infty[$.

b) Étudier la limite de la fonction N en $+\infty$.

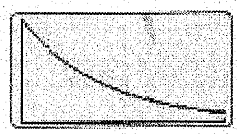
c) Dresser le tableau de variation de la fonction N.

3. Des exemples

1. Le carbone-14

On exprime t en milliers d'années et la constante caractéristique du carbone-14 est $\lambda = 0{,}121$.

a) Tracer à l'écran de la calculatrice, sur l'intervalle $[0\,;20]$, la représentation graphique de la fonction $t \mapsto e^{-0{,}121t}$.



b) Déterminer à l'aide de la fonction TRACE de la calculatrice, la demi-vie du carbone-14, c'est-à-dire la période au bout de laquelle le nombre de noyaux de l'échantillon diminue de moitié.

2. L'uranium-238 et l'iode-131

On exprime t en milliers d'années ; pour l'uranium-238 : $\lambda = 0{,}154 \times 10^{-6}$ et pour l'iode-131 : $\lambda = 31\,625$.

Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la demi-vie de chacun de ces corps radioactifs.

Cette situation est proposée en TD avec pour thème principal l'étude de la désintégration des corps radioactifs. L'équation différentielle qui caractérise le phénomène est donnée. C'est une situation semblable à celle que nous avons étudiée précédemment, mais on peut cependant remarquer que la phrase indiquant la proportionnalité entre les grandeurs $\Delta N(t)$, $N(t)$ et Δt n'est pas la même. C'est une égalité stricte qui est donnée ici (non une relation approximative), dont on peut se demander le sens.

30 Il y a en effet une subtilité permettant de "remonter" dans le temps en utilisant "rétrospectivement" la même fonction : l'hypothèse que le taux de carbone 14 dans la biosphère était le même à l'époque, ce qui n'est pas tout à fait vrai (d'où les dates radiocarbone « calibrées »).

En plus, le passage à l'équation différentielle $N'(t) = -\lambda N(t)$ transite par une écriture différentielle « $dN(t) = -\lambda\ N(t)dt$ » accompagnée d'une phrase indiquant qu'"en mathématiques, on écrit ...".

Passage du champ de départ au champ de traitement

Le texte semble indiquer une équivalence, "facile" à établir, entre les trois égalités ;

$$\Delta N(t)/\Delta t = -\lambda N(t)\ (*),\ dN(t) = -\lambda N(t)dt\ (**)\ \text{et}\ N'(t) = -\lambda N(t)\ (***)$$

C'est comme si le passage de l'un à l'autre allait de soi. On utilise une égalité stricte pour exprimer la première relation (avec des différences finies). Comment peut –on alors établir le lien de l'écriture (*) et $dN(t) = -\lambda\ N(t)dt$?

Si ce lien n'est pas évident à établir à ce niveau, quel est alors l'intérêt de rappeler l'égalité (**) sachant qu'elle ne va pas être utilisée dans l'exercice ?

Le traitement des questions 1 et 2 est exclusivement mathématique. L'obtention de la loi de désintégration radioactive vient d'une manipulation (substitution) de la dérivée d'une fonction donnée.

Retour à la situation de départ

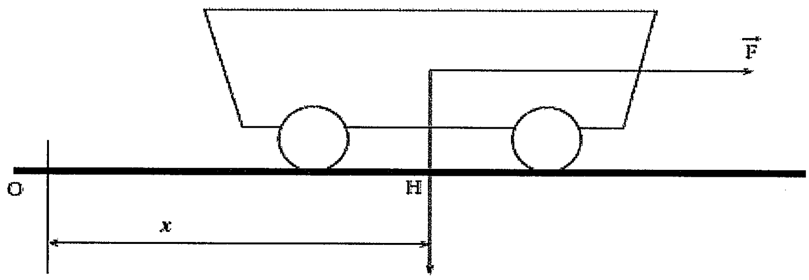
La question 3 étudie des exemples de noyaux radioactifs. On demande, à partir d'un graphique obtenu à l'aide d'une calculatrice, la détermination de la démi-vie du carbone-14 (ou de l'uranium-238 et de l'iode-131) : "période au bout de laquelle le nombre de noyaux de l'échantillon diminue de moitié". On pouvait supprimer cette phrase pour permettre à l'élève de se rappeler le sens de cette grandeur et la manière de l'obtenir.

Pour la dernière question (3.2), on pouvait s'attendre à une interprétation des résultats obtenus après le calcul des deux demi-vies, ainsi qu'à une comparaison (avant l'interprétation) des valeurs des demi-vies des noyaux de ces trois éléments, portant notamment sur l'ordre de grandeur des λ.

c) Thème 3 : Mécanique

Manuel Collection Repère 2006 p. 129 (d'après le bac S, 2004)

Exercice 5 **4 points**
Commun à tous les candidats



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles? la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 N.m^{-1}.s.
La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H? l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement

$$\text{(E)} \qquad 25x' + 200x'' = 50, \text{ où}$$

x' est la dérivée de x par rapport au temps t,
x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$.
   Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $\quad v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.
   Résoudre l'équation différentielle (F).
2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.
   a. Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.
   b. En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-t/8}$.
3. Calculer $V = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale? 90% de sa valeur limite V?
4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

Relation entre le champ de départ et le champ de traitement

Le champ de départ de ce problème est celui de la mécanique. Un schéma est donné pour illustrer le phénomène ainsi que l'équation différentielle qui régit ce phénomène. On peut constater que la part de la modélisation de cette situation n'est pas à la charge de l'élève.

Le champ de traitement est celui des mathématiques. Pour la question 1 « prouver que .... », on y parvient par un jeu de substitution de formules (remplacer v(t) = x'(t) dans l'équation différentielle (E), l'équivalence étant garantie). Pour ce qui est de la résolution de l'équation différentielle, il suffit d'appliquer une formule vue dans le cours. Le constat est le même pour la deuxième question.

Par contre, la formulation de la troisième question laisse croire qu'il y a un retour à la situation de départ. On peut se rendre compte que le résultat ne fait pas l'objet d'une interprétation "physique".

II.3.3. Bilan de l'analyse des jeux de cadre de rationalité

L'analyse des manuels du point de vue de l'articulation entre les cadres de mathématiques et de la physique à propos de l'enseignement des équations différentielles, révèle l'interaction très forte entre les deux disciplines. Pour la plupart des situations de modélisation, le champ de départ est un domaine de la physique (électricité, mécanique ...).

Cependant, l'analyse des transitions entre le champ de départ (cdd) et le champ de traitement (cdt), qui correspond donc à des changements de cadre de rationalité, révèle des difficultés tant du point de vue de la formulation des énoncés que de la traduction mathématique de ces énoncés.

Certains énoncés d'exercices contiennent des expressions qui peuvent s'avérer correctes du point de vue des mathématiques, mais non cohérentes d'un point de la physique. C'est ce type de situation que nous qualifions de *fausse continuité*[31] ; ce qui peut se traduire à la fois par :

une visibilité apparente d'une interaction entre les deux disciplines : utilisation et omniprésence des notions mathématiques pour expliquer la physique

un écart, voire un « non-sens », quant à l'interprétation que chaque discipline peut établir sur les notions ou expressions mathématiques utilisées.

[31] On peut dans ce cas se référer à l'analyse de l'exercice collection Indice paragraphe 0a)

Hormis le fait que le passage du cdd au cdt est très exploité, nous constatons aussi qu'il y a très peu de cas où le retour au champ de départ (rcdd) est fait.

Aussi, plusieurs expressions, données souvent pour expliquer le phénomène physique, sont maladroites et risquent d'induire en erreur les élèves qui vont faire une analogie avec ce qu'ils ont vu en cours de physique. Ces expressions ne traduisent pas forcément la pensée ou la rationalité de la physique. Dans ce cas nous parlons d'une *rupture (de rationalité)* ; c'est le cas, par exemple, de la phrase déjà signalée dans le paragraphe[32] 0a), dans lequel l'on peut s'interroger, dans les faits et dans ce cas précis, sur la façon dont un condensateur, qui est un récepteur, impose des conditions (initiales) au générateur.

Ces éléments d'analyse conduisent à étudier la place et le rôle des registres de représentation sémiotique dans les manuels.

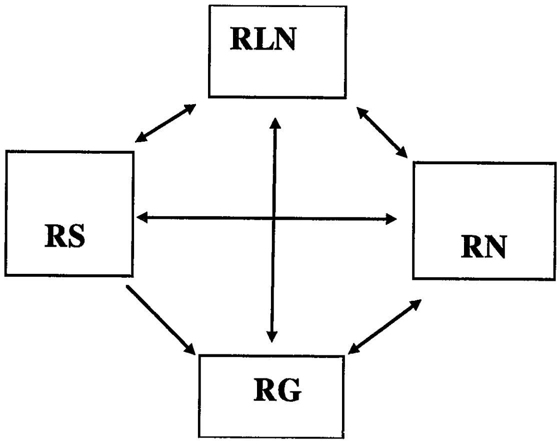
II. 4. Analyse de la continuité du point de vue des registres sémiotiques

II.4.1. Méthodologie

L'étude présentée ici porte sur une analyse de la place accordée aux registres sémiotiques dans la mise en œuvre de la continuité didactique entre les mathématiques et la physique dans les manuels. Il s'agit de cerner, dans chaque partie structurant les manuels, les registres les plus utilisés (dominants) et la manière dont ils sont mis en correspondance entre eux. Les situations analysées sont issues de manuels (parmi les huit déjà indiqués pour l'analyse générale des manuels).

Nous avons utilisé le schéma présenté dans la partie I permettant d'identifier les principaux registres et leurs mises en relation en se référant aux trois activités cognitives (Duval 1995) : *formation, traitement et conversion.*

[32] « De plus la charge initiale du condensateur impose les conditions U(0) = V(0)/3 »

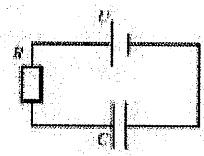


Les flèches correspondent à une activité cognitive (au sens de Duval) que nous avons cherché à identifier dans les manuels. L'activité de conversion ou de formation est alors commentée.

II.4.2. Analyse de quelques manuels

Manuel Collection Indice 2002. Activité 2 p. 73

Un circuit comporte une résistance R de 5 Ω (ohms), une capacité C de 0,05 F (farads) et une pile fournissant une tension constante U de 60 V. La charge (en coulombs) est une fonction q du temps t, vérifiant l'équation $Rq' + \frac{1}{C}q = U$. L'inconnue de cette équation est la fonction q.



Cette équation est un exemple d'équation différentielle. Ne connaissant pas l'expression de $q(t)$, on se propose d'estimer la charge q au bout de 1,5 s dans le cas où $q(0) = 0$.

1. Montrer que $q' = -4q + 12$ (E).

2. Pour faire l'estimation demandée, on va utiliser la méthode d'Euler en choisissant un pas de 0,1 s et construire une approximation de la représentation de q sur [0 ;1,5].
On construit donc une suite de points $M_n(x_n ; y_n)$ à partir du point $M_0(0 ; 0)$.
Démontrer que :

$$x_{n+1} = x_n + 0{,}1 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 0{,}6\,y_n + 1{,}2 \quad \text{pour } n \leqslant 15.$$

3. Pour calculer x_n et y_n, on peut utiliser un tableur ou une calculatrice. Placer les points dans un repère orthogonal. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ obtenue en reliant les points par un trait continu. Tracer dans le même repère, la droite Δ d'équation $q = 3$.
Quelle est la charge approximative au bout de 1,5 s ?

	A	B	C
1	h	0,1	
2	n	x(n)	y(n)
3	0	0	0
4	1	0,1	1,2
5	2	0,2	1,92
6	3	0,3	2,352
7	4	0,4	2,6112

4. En utilisant l'équation (E), écrire une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $t = 0$. Tracer cette tangente. Vérifier que l'abscisse du point d'intersection de cette tangente et de la droite Δ est égale à $R \times C$ soit 0,25 s. On note $\tau = R \times C$, appelé **temps caractéristique** du circuit.

5. Vérifier que pour $t = 5\tau$, la charge est voisine de 99 % de la charge limite 3.

Cette activité est donnée en "travaux dirigés". Elle étudie une situation concernant un circuit électrique (RC) et mobilise une diversité de registres de représentation : langue naturelle, symbolique, numérique (tableau) et illustration (schéma) (convoqués dans l'énoncé), graphique (sollicité dans les réponses à donner).

Dans la question 1, la réponse doit venir d'un *traitement* de l'équation différentielle donnée

$$Rq' + \frac{1}{C}q = U \qquad \text{(E).}$$

Les coefficients R, $\frac{1}{C}$ et U sont obtenus par une application numérique (en substituant dans (E) les valeurs de numériques de R, C et U). On peut signaler là aussi que le schéma n'intervient pas directement à la formation de l'équation (E).

Dans la question 2, le recours à la méthode d'Euler permet de passer de l'équation différentielle à une suite double $(x_n\,;\,y_n)$, solution approchée (tableau de valeurs numériques). Là aussi, c'est une activité de traitement dans le registre symbolique.

Pourtant, la quantité y_{n+1} correspond à $f(x_{n+1})$ c'est à dire à $f(x_n + 0{,}1)$, dont l'approximation affine au voisinage de 0,1 est : $f(x_n + 0{,}1) \approx f'(x_n) \times 0{,}1 + f(x_n)$

ce qui revient à écrire $y_{n+1} \approx y_n' \times 0{,}1 + y_n$ (1)

Lorsqu'on remplace $y_n' = -4\,y_n + 12$ dans (1) on trouve normalement $y_{n+1} \approx 0{,}6y_n + 1{,}2$

Nous nous sommes demandé alors d'où peut provenir le signe d'égalité utilisé dans l'expression $y_{n+1} = 0{,}6\,y_n + 1{,}2$.

Mais la question 3 permet un changement de registre (RS ➔ RN). C'est une activité de conversion. L'utilisation d'un tableur/grapheur conduit à la construction de la courbe à partir des points obtenus grâce à la suite $(x_n\,;\,y_n)$. Il s'agit là d'une conversion.

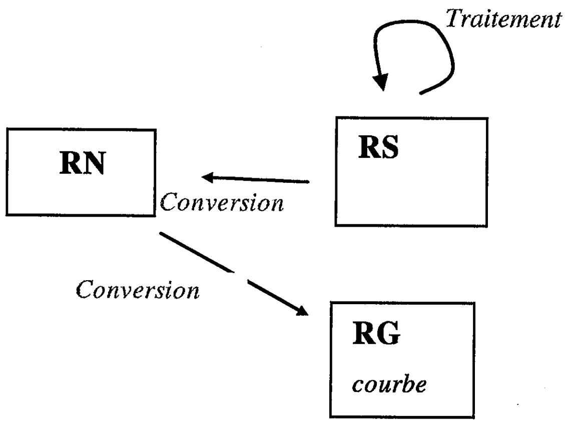


Schéma 4 : articulation des registres

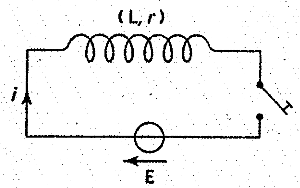
On peut constater que la mise en relation entre la solution (données numériques) et sa représentation graphique n'est pas demandée dans l'énoncé. On pouvait cependant s'attendre à ce niveau que soit demandé à l'élève de comparer ces deux types de solutions, d'en évaluer l'erreur commise en approximant la fonction solution de l'équation différentielle par les valeurs numériques obtenues grâce à la méthode d'Euler. Cette comparaison est aussi possible par les courbes, c'est-à-dire faire construire dans un même repère les courbes exacte et approchée puis procéder à une interprétation. Ce type de démarche n'est pas envisagé dans ce manuel.

Au demeurant, la relation mathématiques-physique est très peu évoquée dans cette activité, du point de vue des registres convoqués et ce malgré leur diversité. Le schéma donné dans l'énoncé n'a servi à rien. Le graphique à construire à un statut de courbe mathématique. Il n'est pas utilisé pour interpréter, du point de vue de la physique, les résultats. L'équation différentielle qui est donnée a un statut « hybride », dans la mesure où les symboles q, R, C et U relèvent de la physique, mais où la notation de la dérivée est celle (ou presque) du mathématicien : on retrouve la notation q' et non $\frac{dq}{dt}$ ou $\dot{q}$ comme en physique.

Manuel Collection Hyperbole 2002 Exercice 51, p. 259

51 Bobine (L, *r*)

Un circuit comprend en série un générateur de force électromotrice E (en volts) et une bobine de résistance *r* (en ohms) et d'inductance L (en henrys). À l'instant *t* (en secondes), on note $i(t)$ l'intensité en ampères, du courant dans le circuit. La fonction i suit la loi :



$$Li' + Ri = E.$$

1. a) Résoudre cette équation différentielle.

b) Déterminer l'expression de $i(t)$ sachant que $i(0) = 0$.

INFO

Le quotient $\frac{L}{R}$ est homogène à une durée.

$\tau = \frac{L}{R}$ est appelé la constante de temps de la bobine.

2. a) Étudier la limite ℓ de i lorsque t tend vers $+\infty$.

b) Quel pourcentage, arrondi à l'unité, de sa valeur limite ℓ, l'intensité atteint-elle au bout de τ secondes ? de 5τ secondes ?

3. $\mathscr{C}$ est la courbe représentant i dans un repère orthogonal.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction i.

b) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Donner l'abscisse du point d'intersection de T avec la droite d'équation $y = \ell$.

c) Tracer $\mathscr{C}$ et son asymptote, dans le cas où $E = 5{,}1$ V, $L = 1$ H et $R = 114\ \Omega$.

La situation est modélisée par une équation différentielle donnée dans le registre symbolique (algébrique). Un schéma du circuit est donné, normalement en lien avec la description faite et l'équation différentielle proposée.

La question 1 demande la résolution de l'équation puis la détermination d'une solution particulière. C'est un traitement mathématique (algébrique/analytique) qui est attendu. On passe de l'équation différentielle donnée dans le registre symbolique à l'ensemble des solutions (qui sont des fonctions), données elles aussi dans le même registre.

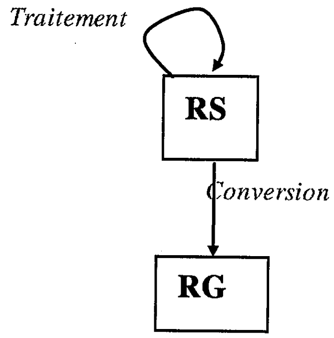


Tableau 1 : Articulation des registres dans le cadre de l'équation différentielle $Li' + Ri = E$

Cette situation ne met en jeu que deux registres sémiotiques : RS et RG. On peut se demander quelle est la fonction du schéma qui est donné au début de l'exercice, car il n'a finalement pas servi.

Quant à l'analyse du point de vue des activités cognitives au sens de Duval, les questions 1, 2, 3ab relèvent d'une activité de traitement tandis que la question 3 est une activité de conversion.

Par ailleurs, dans la question 2) le calcul de la valeur limite de la fonction, obtenue quand t tend vers l'infini, est un résultat important en physique. L'interprétation graphique de cette limite conduit à anticiper sur le régime du phénomène physique et sur la constante de temps (question 2b). Bien que la construction de la courbe soit demandée dans la question 3 (passage du registre symbolique au registre graphique), on déplore cependant l'absence d'une question intermédiaire pouvant associer de manière explicite les questions 2 et 3. On aurait introduit dans ce cas un autre registre, celui du langage naturel par exemple, pour demander une interprétation mathématique (graphique) et physique (type de régime et constante de temps).

II.4.3. Bilan de l'analyse des registres

Nous avons mené une analyse en termes de registres de représentation (sémiotique) autour de trois notions : *les équations différentielles, leurs solutions (fonctions) et la représentation graphique* de ces fonctions. Mais en amont de ces trois notions se trouve *le discours de l'énoncé* qui est le texte de présentation du phénomène à étudier.

Une diversité de registres sont mobilisés simultanément ou successivement. Le registre de la langue naturelle est souvent convoqué pour énoncer le problème (phénomène) à étudier ; le registre symbolique est celui dans lequel les équations différentielles sont représentées dans la plupart des cas.

Des registres figuratifs comme le schéma apparaissent aussi dans l'énoncé, mais, malheureusement, ils sont sous-exploités. D'autres registres sont souvent convoqués dans le traitement des questions ; c'est souvent le cas pour le registre graphique.

Quant aux activités cognitives, nous avons pu constater que l'activité de *formation* permet la représentation sémiotique des notions de fonction ou d'équation différentielle, à partir des éléments de l'énoncé. La plupart des situations présentées dans les manuels relatent une expérience déjà réalisée. Le discours souvent simplificateur dû au cadre[33] dans lequel ce discours est tenu, fait très peu apparaitre les règles de conformité. Par ailleurs, l'activité de formation des équations différentielles (voire des fonctions solutions) dans la plupart des cas s'accompagne d'une *conversion* ; c'est cette activité qui permet de passer, par exemple, de la fonction (solution de l'équation différentielle) dans le registre algébrique au tableau numérique ou au graphique ou bien, pour le cas qui intéresse notre étude, de l'énoncé d'une situation (en langue naturelle) à une expression mathématique. Nous avons constaté que, dans ce type de cas, les règles de conversion ne sont pas toujours explicitées. C'est le cas de la radioactivité où un même texte[34] ou presque, conduit à des formules mathématiques différentes :

Manuel Hyperbole 2002 activité 2, p.102 : $$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} \approx -\lambda N(t)$$

Manuel Hyperbole[35] 2006 TD1 p. 22 : $$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t)$$

Manuel Math'x 2006 activité 1 p. 114 : $$N(t+1) - N(t) \approx -\lambda N(t)$$

[33] Le cadre est celui des mathématiques : C'est une expérience de physique présentée dans un manuel de mathématiques.

[34] Il s'agit du texte donnant la relation entre le nombre de noyaux moyens désintégrés entre deux instants proches t et t_1 et le nombre de noyaux présents à l'instant t. ce texte que l'on trouve dans le document d'accompagnement des programmes (2002) est repris dans les manuels parfois avec une formulation légèrement différente.

[35] Il s'agit de la nouvelle édition du manuel Hyperbole (2002).

Manuel Math'x exercice 50 p. 132 : $\dfrac{N(t+\Delta t)-N(t)}{N(t)\times\Delta t}=-\lambda$

Manuel Repére 2006 (activité introductive) p. 97 : $\Delta N = -\lambda \times \Delta t \times N(t)$

Manuel Bréal 2002 (cours) p. 67 : $\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t}=-\lambda N(t)$

Le manuel Bréal met une note en marge de la page en justifiant cette égalité comme étant une loi physique :

> « *La loi physique s'écrit :* $\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t}=-\lambda N(t)$ *ou* $\Delta N = -\lambda N(t)\,\Delta t$. Δt *représente la différence entre deux instants proches* t_1 *et* t_2. $\Delta N(t) = N(t_2) - N(t_1)$ *est la différence correspondante* »

Quant à l'activité de *traitement*, elle concerne beaucoup plus la transformation de l'équation différentielle en des fonctions (solutions) et ce, sans changement de registre. C'est le registre symbolique (algébrique) qui est privilégié. La tâche relève souvent de l'intra-mathématiques ; les règles d'expansion (qui assurent le traitement) sont souvent celles de la dérivation des fonctions et de la substitution algébrique (consistant à remplacer une quantité donnée sous forme d'expression algébrique ou de valeurs numériques dans une autre expression).

Enfin, l'analyse des manuels du point de vue des registres sémiotiques montrent que les situations mettant en jeu les relations entre les mathématiques et la physique font appel (simultanément ou successivement) à plusieurs registres sémiotiques. Mais le passage d'un registre donné dans le cadre des mathématiques vers un registre donné dans le cadre de la physique est souvent à la charge de l'énoncé et non de l'élève. De même, certaines représentations données dans l'énoncé des exercices (cas des schémas ou de certains graphiques) n'interviennent pas dans la suite et, donc, ne sont exploitées.

II.5. Analyse de la continuité du point de vue de la praxéologie

II.5.1. Méthodologie :

L'étude présentée ici consiste à :

identifier les types des tâches les plus utilisés (types de tâches dominants) dans le cas des situations de modélisation, tout en précisant le domaine de la physique dont ils sont issus (électricité, radioactivité ou mécanique).

caractériser l'organisation mathématique qui émerge dans l'accomplissement des quatre types de tâches de modélisation que nous avons répertoriés et présentés plus haut. Il s'agit d'examiner la ou les technique(s) et technologie(s) utilisée(s) dans ce cas.

Mais avant, il nous a semblé nécessaire de rappeler très vite l'organisation mathématique associée aux types de tâches dans le cas des situations intra-mathématiques. Le but est de mieux situer le type d'organisation mathématique « mixte » mis en jeu dans les situations de modélisation.

Les situations (de modélisation) analysées dans cette partie sont issues de cinq[36] ouvrages, choisis en fonction, soit de la fréquence des situations, soit des situations déjà analysées dans les parties précédentes (II.3 ou II.4).

II.5.2. Type de tâches

Selon les thèmes de la physique où sont traitées les équations différentielles, en relation avec les manuels de physique. Nous rappelons que nous avons catégorisé les types de tâches comme suit :

(T1) : déterminer une équation différentielle

(T2) : résoudre (algébriquement) une équation différentielle

(T3) : vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

(T4) : résoudre (numériquement) une équation différentielle

L'analyse quantitative des manuels a permis de donner les éléments ci-dessous résumés dans un tableau.

[36] Les cinq manuels sont retenus parmi les huit déjà signalés plus haut (voir II.1)

Thème	Type de tâches				
	(T1)	(T2)	(T3)	(T4)	Total
Électricité	10	1	4	1	16
Radioactivité	10	1	6	1	18
mécanique	8	2	4	1	15
Total	28	4	14	3	49

Tableau 10 donnant le nombre des principaux types de tâches rencontrés dans les manuels

Sur les 8 manuels analysés, nous avons compté 49 types de tâches associées aux équations différentielles de premier ordre et ce dans les domaines de l'électricité, de la radioactivité et de la mécanique :

14 tâches de type (T1), dont 6 en radioactivité, 4 en l'électricité et 4 en mécanique,

28 tâches de type (T2), dont 10 en radioactivité, 10 en électricité et 8 en mécanique,

4 tâches de type (T3), dont 1 en radioactivité, 1 électricité et 2 en mécanique,

3 tâches de type (T4), dont 1 en radioactivité, 1 en électricité et 1 en mécanique.

Le constat de voir apparaître (T2) plus souvent que les autres types de tâches, n'est pas un résultat surprenant dans la mesure où (T2) est le type de tâche emblématique dans l'activité intra-mathématique pour l'étude des équations différentielles.

Le type de tâche (T3) est une variante de (T2) ; Il apparaît souvent dans les manuels sous forme d'une demande de résolution d'une équation différentielle alors que celle-ci est déjà donnée et une fonction (supposée être solution de cette équation) est donnée aussi. C'est alors une vérification qui est attendue, c'est -à dire une substitution de la fonction dans l'équation différentielle.

Les types de tâches (T1) et (T4) ne font pas partie des tâches "emblématiques" en terminale S, en mathématiques.

Le nombre 14 pour le type de tâches (T1) peut s'expliquer par le fait que nous avons considéré dans cette catégorie les types de tâches où il est demandé de déterminer l'équation différentielle. Il se trouve, dans ce cas, des situations où une équation différentielle est donnée sous la forme du "physicien" et où l'on demande son écriture sous la forme du "mathématicien".

Le type de tâche (T4) est celui associée à la résolution numérique par la méthode d'Euler.

II.5.3. Remarques sur les types de tâches (T2) et (T3).

La tâche de type (T2) relève de l'intra-mathématique. Nous rappelons ci-dessous deux praxéologies relatives à ce type que nous avons rencontré dans la plupart des manuels.

a) Type de tâche (T2)

Éléments du bloc pratico-technique [T/ τ] relatifs à (T1)

Pour la tâche de type (T2) associée à l'étude des équations différentielles du premier ordre avec ou sans second membre constant, c'est-à- dire, les équations de type

" $y' = ay$" (E_1) ou " $y' = ay + b$" (E_2), avec a réel différent de 0, la technique qui permet de l'accomplir repose sur un ou deux théorèmes (selon les auteurs de manuels). La technique (τ_1) consiste à appliquer le résultat de ces théorèmes.

***Théorème 1** : a désigne un réel donné.*

Les solutions sur R de l'équation différentielle y'= ay sont les fonctions de la forme
$x \mapsto ke^{ax}$ *où k est une constante réelle.*

***Théorème 2** : a et b désignent deux réels donnés, avec $a \neq 0$.*

Les solutions sur R de l'équation différentielle y'= ay + b sont les fonctions de la forme

$x \mapsto ke^{ax} - b/a$, *où k est une constante réelle.*

Par ailleurs, il apparaît dans la plupart des manuels d'autres types d'équations différentielles à résoudre qui ne sont pas données sous la forme (E1) ou (E2). Dans le cas, par exemple, des équations différentielles de type $y'+ay = \varphi$, où φ est une fonction donnée à variable réelle, de nouvelles techniques (θ'1) sont proposées dans l'exercice (généralement sous forme de guidage). C'est le cas, dans le manuel Repère, de l'exercice 6 p. 108, qui est un exercice guidé.

On considère les équations différentielles :

$$y' - y = x \quad (E) \qquad et \qquad y' = y \quad (F).$$

1. Vérifier que la solution $u : x \mapsto -x - 1$ *est une solution de cette équation différentielle*
2. Montrer que g est solution de (E) équivaut à g – u est solution de (F).
3 déterminer les solutions de (F)
4. en déduire les solutions de (E)

Tableau 11 : Exercice [1] extrait de manuel Repère p. 108

Éléments du bloc technologico-théorique [θ/ Θ]

On a trouvé, dans les manuels, plusieurs discours qui expliquent la technique (τ1).

On peut citer comme technologie (θ1), les démonstrations du théorème (technique) qui conduit à montrer l'existence et l'unicité des solutions de l'équation différentielle en s'appuyant essentiellement sur les notions d'analyse (Théorie Θ1) comme la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle de R et les propriétés de la fonction exponentielle.

Mais certains manuels (comme **Repère** p. 81, **Transmath** TD 4 p. 99) proposent une technologie dont les étapes sont celles qui apparaissent dans l'exercice [1]. Le discours peut être résumé en ces termes : « Il suffit de connaître une solution particulière (qui est donnée dans l'énoncé de l'exercice dans la plupart des cas) constante pour que cette technique soit transposée aux cas des équations (E1) ou (E2).

b) Type de tâches (T3)

Éléments du bloc pratico-technique associés

Pour les types de tâches (T3), la technique (τ_3) n'est pas donnée. On peut cependant noter que celle-ci peut être considérée comme faisant partie des acquis des élèves. En effet, dans le cas des équations algébriques, pour vérifier qu'un nombre est solution d'une équation, les élèves ont l'habitude de remplacer ce nombre dans l'équation pour confirmer la validité de l'égalité. Cette analogie peut aussi trouver sa légitimité dans le cas des équations différentielles.

Éléments du bloc technologico-théorique

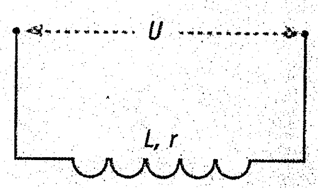
Pour le type de tâche (T3), la technique n'est pas donnée (sans doute, supposée comme par les élèves) et la technologie associée est implicite.

Nous nous sommes intéressé, dans la suite, à l'évolution des organisations mathématiques mises en place dans le cas des situations dites de "modélisation", afin d'analyser la place accordée aux connaissances issues de la physique dans le traitement de ces situations.

II.5.4. Étude de quelques exemples de situations extra-mathématiques

a) Manuel Bordas, Collection Fractale, Exercice 120, p. 113

120 Dans un circuit contenant un générateur de force électromotrice E ainsi qu'une bobine de résistance r (en ohms) et d'inductance L (en henrys), on montre que l'intensité est une fonction du temps solution de l'équation différentielle : $LY' + rY = E$.
On prend $E = 10$ V, $r = 100\ \Omega$ et $L = 0{,}2$ H. À l'instant 0, l'intensité est nulle dans le circuit.



1) Déterminer la fonction $i : t \mapsto i(t)$ décrivant l'évolution de l'intensité i en fonction du temps.
2) Déterminer la limite de i quand t tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

Remarque :

Dans cet exercice, l'équation différentielle est donnée dans le symbolisme du mathématicien et on se demande pourquoi avoir choisi la notion « Y » au lieu de « y », ou même la notation habituelle de l'intensité du courant.

Par ailleurs, nous pouvons remarquer que le symbole U qui apparaît dans le schéma n'est rattaché à aucune donnée de l'exercice. La question de la place et du rôle du schéma se pose ici, mais nous ne l'abordons pas dans cette partie.

La première question relève des tâches du type (T2). L'accomplissement d'une telle tâche conduit à transformer l'équation différentielle donnée sous la forme standard $y' = ay + b$. Il suffira alors de considérer, par simple changement de notation, la fonction solution obtenue

$t \rightarrow f(t)$ en $t \rightarrow i(t)$.

La praxéologie relative à ce type de tâche reste celle que nous avons décrite plus haut, concernant les tâches intra-mathématiques.

Remarque : On peut considérer que la tâche concernant le passage de la fonction *f* (solution de l'équation différentielle mathématique) et la fonction *i* (décrivant l'évolution de l'intensité i en fonction du temps), est implicite.

La question 2 demande le calcul d'une limite. C'est un type de tâche classique en analyse. On se sert de l'expression de la fonction solution $t \rightarrow i(t)$ déjà déterminée et on applique le calcul des limites. Par contre, le second volet de la question demande une interprétation du résultat. On n'a pas précisé, dans cette question, la nature de l'interprétation attendue, car deux interprétations sont possibles :

une interprétation mathématique de nature graphique. On se place dans le cadre des fonctions en analyse. Soit I la valeur limite obtenue ; dans le repère considéré, la droite d'équation y = I est considérée comme l'asymptote horizontale à la courbe de i(t) en $+ \infty$. Les savoirs et savoirs-faire associés sont mathématiques. Dans ce cas, cette tâche ne peut être considérée comme une tâche de transition mathématiques-physique.

Une interprétation physique du phénomène. On suppose qu'il s'agit de la réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension, dans le cas précis de l'établissement d'un courant. On peut se servir de l'expression de i(t) obtenue pour trouver la valeur I. On sait que, d'après le cours de physique, lors de l'établissement du courant dans une bobine RL, la valeur de l'intensité est donnée par $i(t) = E/R(1 - e^{-(R/L)t})$. En régime permanent, la valeur (limite) de l'intensité est I = E/R. Dans ce cas, cette tâche de transition (MP) donne l'occasion de mettre en valeur les connaissances acquises dans le cours de physique.

Cette deuxième interprétation s'appuie sur des éléments du cours de physique. La praxéologie associée relève exclusivement de la physique. On attend sans doute, par effet de contrat didactique, que l'élève utilise la première interprétation (mathématique) plutôt que la deuxième.

b) Manuel Collection Repère, exercice 87 p. 122

On sait que tout corps, tant qu'il est en vie, contient l'un des isotopes du carbone, le carbone 14, ^{14}C, qu'il renouvelle et garde en proportion constante. A sa mort, la quantité de cet élément chimique décroît alors suivant la relation : $\Delta N(t) = -\lambda N(t)\,\Delta t$,

où λ est une constante strictement positive qui dépend de l'élément radioactif et N(t) le nombre de noyaux radioactifs de ^{14}C à l'instant t.

Lorsque le nombre de ces noyaux est très grand (ce qui est le cas, ici présent), on peut faire l'hypothèse que la fonction $t \mapsto N(t)$ est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

1. Justifier que N vérifie alors $N'(t) = \lambda N(t)\,\Delta t$

2. Résoudre cette équation différentielle, en prenant comme condition initiale $N(0) = N_0$ (N_0 est le nombre initial de noyaux radioactifs à l'instant t = 0).

3. On appelle demi-vie de l'élément radioactif le temps (noté $t_{1/2}$) au bout duquel le nombre de noyaux a diminué de moitié. Montrer que ce nombre vérifie l'équation : $e^{-\lambda t} = ½$.

4. On admet que pour le carbone 14 la constante λ est voisine de $\lambda = 1{,}21.10^{-4}$.

En étudiant sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ la fonction $f : t \mapsto e^{-1{,}21.10\text{-}4\, t} - 1/2$, résoudre cette dernière équation, puis en déduire, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée (à l'année près) de la demi-vie du carbone 14.

Analyse :

Question 1 : Justifier que N vérifie alors $N'(t) = \lambda N(t)\,\Delta t$

Cette question pourrait être considérée comme une tâche de type (T3) si l'expression algébrique de la fonction N était donnée. Ce serait alors de la vérification, en substituant l'expression de N et celle de sa dérivée première dans l'équation différentielle proposée, puis en comparant ses deux membres.

En réalité, dans cette question, on demande à justifier l'implication :
Si « N ... alors $N'(t) = \lambda N(t)\,\Delta t$ ... ».

C'est une tâche intra-mathématique. En effet, d'après l'énoncé de l'exercice, le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t $N(t)$ suit la relation $\Delta N(t) = -\lambda\, N(t)\,\Delta t$ (1)

Une technique possible permettant d'accomplir ce type de tâche consiste à retrouver l'équation donnée à partir de la relation (1) :

A partir de $\Delta N(t) = -\lambda\, N(t)\Delta t$, on peut avoir $\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t)$

La fonction N étant supposé dérivable, et par passage à la limite de chaque membre (lorsque Δt tend vers 0), on obtient $\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$ (écriture différentielle) qui s'écrit aussi $N'(t) = -\lambda N(t)$.

Cette technique apparaît aussi bien dans les manuels de mathématiques que dans ceux de physique.

Éléments technologico-théoriques

Nous nous sommes déjà exprimé[37] sur le sens accordé à l'utilisation du signe « = ». Les éléments technologiques sont à la fois mathématiques et expérimentaux (physique)

- Mathématiques, car on utilise des connaissances du calcul différentiel et de topologie, plus précisément la notion de limite et celles d'accroissement et de fonction différentiable.

  L'un des points forts de l'utilisation des ces notions est ici, l'approximation entre le taux d'accroissement d'une fonction sur un intervalle et sa fonction dérivée sur le même intervalle : $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dt}$

  > Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, on pose $y = f(x)$. Pour une petite variation de la variable x, on obtient des variations des images : $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$
  >
  > On a $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; ce qui signifie que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x)$, où $\varepsilon(\Delta x)$ représente un terme complémentaire qui vérifie : $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$
  >
  > Lorsque Δx est voisin de 0, $\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$, avec une erreur négligeable devant Δx.

- Expérimentaux (physique), car depuis le cours de physique[38], on apprend aux élèves à passer de $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} + \lambda N(t) = 0$ (1) à $\frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t) = 0$ (2)

  par passage à la limite (faire tendre Δt vers 0) sans trop d'exigences puisque ce résultat découle de l'expérience (observation). Ainsi, toutes les interprétations en termes d'approximation/erreur sont évacuées.

---

37 voir le paragraphe 0 du même chapitre, dans la partie qui traite le thème « radioactivité »

38 On peut se référer à plusieurs manuels. Nous en citons un : collection Microméga p. 92.

Dans le cas de la radioactivité, nous constatons dans plusieurs manuels de mathématiques et de physique que le choix entre l'utilisation de signe « = » ou de « ≈ » n'est pas toujours clair.

II.5.5. Bilan de l'analyse praxéologique

Du point de vue de la praxéologie mathématique, il ressort de notre analyse que le type de tâche (T2) : « résoudre l'équation différentielle ... » est celui qui apparaît le plus fréquemment, aussi bien dans les activités intra-mathématiques que dans celles de modélisation extra-mathématique. L'accomplissement de ce type de tâche fait appel à une technique donnée dans le cours (théorèmes) dont les éléments technologico-théoriques sont disponibles et censée faire partie du topos de l'élève. Le type de tâche (T3) est très proche de (T2) ; nous pouvons les considérer comme des tâches routinières, dont l'accomplissement suit une pratique « figée ».

Nous avons constaté que l'étude des praxéologies, à propos des situations de modélisation, n'implique pas nécessairement une mise en relation des techniques ou technologies associant les connaissances mathématiques et les connaissances physiques. Dans la plupart des cas, les tâches sont essentiellement « mathématiques » et les techniques aussi : l'élève doit reconnaitre le type de tâche puis appliquer une technique mathématique. Il serait intéressant de regarder dans les manuels de physique, notamment dans les parties qui étudient les équations différentielles du premier ordre, si l'on retrouve les mêmes types de tâches, et, dans l'affirmative, quelle technique on utilise.

II.6. Synthèse de l'analyse des ouvrages de mathématiques

Au regard des contenus des cours sur les équations différentielles, Il ressort de notre analyse que les situations extra-mathématiques qui sont proposées dans les manuels, ainsi que les problèmes de baccalauréat, traduisent l'idée d'une mise en relation, à travers ces situations, entre les mathématiques et les autres sciences. Cependant, dans beaucoup de situations, la concrétisation de la continuité didactique, évoquée dans les programmes et documents d'accompagnement, paraît loin d'être atteinte.

Fausse continuité didactique

Du point de vue de la modélisation, les situations proposées sont déjà modélisées. En effet, dans la quasi-totalité des cas traités, aussi bien en activités introductives, en travaux dirigés qu'en exercices, la mise en équation différentielle est prise en charge par l'énoncé. L'équation différentielle qui régit le phénomène à étudier est déjà donnée ; des indications pour le traitement de la tâche sont souvent données. L'étude dans le champ de traitement des équations différentielles relève généralement du seul cadre des mathématiques. Elle consiste à procéder par des manipulations (en général des substitutions) pour retrouver l'équation différentielle (qui est connue) ou alors à vérifier qu'une fonction proposée dans la situation est solution de l'équation différentielle donnée. Quant au traitement proprement dit de l'équation différentielle, c'est-à-dire sa résolution, la tâche de l'élève se réduit à reconnaître le type d'équation et à appliquer la procédure (méthode) vue en cours. Il nous semble que le contexte choisi (sciences expérimentales) pour la mise en œuvre de la coordination mathématiques-physique n'est pas assez exploité. Ce serait l'occasion de se servir des éléments de rationalité issus de l'enseignement de la physique pour développer un début d'apprentissage du processus de modélisation. (Nous y reviendrons après l'analyse des manuels de physique).

Ce constat montre que le jeu de cadres de rationalités attendu, dans le but d'une continuité didactique, est tronqué. En général, voici comment on peut schématiser le traitement des situations de modélisation conduisant à une équation différentielle :

$$\begin{tikzcd}
\text{1) Physique} \arrow[d, dashed, "\text{PM}"] & ? & \text{4) Physique} \\
\text{2) Maths} \arrow[rr] & & \text{3) Maths} \arrow[u, dashed, "\text{MP}"']
\end{tikzcd}$$

La transition PM est assurée très souvent par l'énoncé. La tâche qui revient à l'élève est le traitement mathématique du problème (passage 2 -3). De même, dans la plupart des situations analysées, il ya très peu de tâches relatives à la transition MP. De plus, même quand le retour champ de départ (physique) est envisagé, la manière dont les questions sont formulées n'indique pas toujours de façon explicite le recours au passage 4-1 (physique – physique), c'est-à-dire l'apport une réponse physique à la question posée dans ce cadre là. Dans ce cas, on peut dire que le processus de modélisation, qui apparaît dans une réalité pseudo-concrète, est *inachevé.*

Nous avons qualifié de *continuité didactique apparente* ou de *fausse continuité,* ce travail de modélisation qui semble se caractériser par la simple mise en relation, dans un énoncé, de notions de physique (chimie et autres) et par le rappel de quelques ostensifs mathématiques (formules vues en classes ou non). Pourtant, de nombreuses situations relèvent d'un simple habillage (Dumont 1983). Dans cette optique, une analyse des sujets d'examens (Raymondaud & Henry 1998) qualifient « d'habillage » le contenu de certains sujets du Baccalauréat qui semble s'appuyer sur un caractère extra-mathématique mais en définitive, alourdit le traitement didactique et peut entraîner des confusions :

> « Voici encore un énoncé maladroitement habillé pour "faire plus vrai" d'un modèle déjà (...) Le thème est séduisant, mais dans sa formulation il a l'inconvénient didactique de confondre modèle et réalité, ou plutôt de chercher à évacuer dans les implicites le statut de modèle ».
>
> (Raymondaud et *al* 1998, pp. 54 -55)

La multiplicité des exercices « habillés » peut alors constituer un obstacle pour atteindre l'objectif de continuité didactique souhaité.

Signalons aussi que le traitement de ces situations est suivi de très peu d'un travail d'interprétation « physique » des résultats et, donc, d'un retour au champ de départ. En s'appuyant sur notre schéma de modélisation (paragraphe 0), on peut se rendre compte qu'il y a très peu de retours au champ de départ.

Praxéologie, registre de représentations et jeux des cadres de rationalités

L'analyse praxéologique des situations de modélisation montre que les techniques et technologies envisagées relèvent exclusivement des mathématiques. Le caractère mixte de ces situations ne tient que sur leur habillage physique et non sur l'organisation praxéologique. Pourtant ces situations de modélisation mettent en scène un jeu de notation et de registres sémiotiques qui, dans la plupart des cas, sont sous-exploités : certains schémas et graphiques, qui auraient servi à l'accomplissement des tâches de transition (PM) ou (MP), ne sont pas utilisés ou parfois sont erronés (donc ne jouent pas vraiment de rôle).

L'une des questions qui se posent est celle du choix et de la pertinence de ces situations de modélisation pour la continuité didactique. Nous pensons que plusieurs de ces situations, intéressantes, nécessitent une amélioration en prenant en compte la subtilité due au notation, les statuts « mathématique » et « physique » des courbes, mais aussi en intégrant souvent des tâches de transition d'interprétation maths-physique.

Nous étudierons plus tard la question des tâches similaires qui apparaissent dans les manuels de mathématiques et de physique, mais en convoquant des techniques ou technologies différentes.

Quels liens avec les manuels de physique ?

Parallèlement à cette analyse des manuels des mathématiques, nous nous sommes intéressés à la description de la réalité pour l'étude des équations différentielles dans les manuels de physique. A cet égard, conformément à la grille d'analyse des manuels que nous avons établie, l'étude de nombreuses questions (générales) a permis d'orienter notre étude des manuels de physique. On peut en citer quelques-unes :

Quels liens peut-on établir entre le niveau de modélisation constaté dans les manuels de mathématiques et celui dans lequel sont étudiés les phénomènes relatifs : aux circuits RC ou RL, à la radioactivité et à la mécanique (chute des corps) ?

Quelle organisation praxéologique (organisation physique) est envisagée et quel lien est fait avec les organisations mathématiques (complémentarité/analogie) ?

Quelle prise en compte de la coordination des registres de représentations et quel rapport aux mathématiques ?

III. Analyse de manuels de physique

L'analyse des manuels que nous présentons ici comporte un volet descriptif des champs d'apparition de l'objet/outil "équations différentielles", une analyse des jeux de cadres de rationalité présents dans les modélisations, une analyse complémentaire selon le point de vue des registres de représentation et enfin, une analyse des activités du point de vue des types de tâches.

III. 1. Analyse descriptive : la place des équations différentielles

La référence au programme limite *a priori* le nombre de situations faisant intervenir les équations différentielles du premier ordre, et en particulier l'introduction de l'outil "équation différentielle", qui n'est proposée que pour l'étude de la réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension (B.O. n°4 HS 7, 2001). Par contre, la référence au document d'accompagnement, ainsi que la lecture des seuls contenus, permettent d'envisager l'introduction des équations différentielles dans d'autres domaines, tel celui de la radioactivité. Potentiellement, ce sont donc plusieurs domaines qui peuvent être concernés – transformations nucléaires (radioactivité), évolution des systèmes électriques et évolution temporelle des systèmes mécaniques. Dans ces domaines, les thèmes peuvent être variés : charge ou décharge d'un condensateur, établissement du courant dans une bobine pour l'électrocinétique, chute libre, chute freinée pour la mécanique.

III.1.1. Méthodologie

Dans les manuels de physique, nous nous sommes intéressés au champ d'apparition première de l'objet "équation différentielle" du premier ordre. Le but est d'examiner le discours qui accompagne l'introduction de ces équations mais aussi de relever des explications relatives à ce nouveau concept et les références aux mathématiques. Nous nous sommes également intéressé au nombre d'exercices ou de situations présentés faisant référence aux équations différentielles du premier ordre. Il s'agit de relever les situations qui demandent de trouver et/ou de résoudre une équation différentielle du premier ordre.

III.1.2. Les champs d'apparition

Dans un premier temps, nous avons donc relevé le lieu de première apparition (la « première rencontre », au sens de Chevallard) et de présence dans les manuels. Le résultat, portant sur 6 ouvrages de physique, est consigné dans le tableau ci-dessous.

Ouvrages	Lieu de première apparition	Autres présences
Collection Microméga (Hatier)	Loi de décroissance radioactive (p. 92)	Dipôle RC, Dipôle RL, Chute verticale (avec frottement[1], libre)
Collection Parisi (Belin)	Dipôle RC (p. 66)	Dipôle RL, Chute verticale (à préciser)
Collection Galiléo (Bordas)	Dipôle RC (p. 132-134)	Dipôle RL, Chute verticale (à préciser)
Collection Hélios (Hachette)	Dipôle RC (p. 112, 117-118)	Dipôle RL, Chute verticale (avec frottement) (*)
Collection Tomasino (Nathan)	Dipôle RC (p. 142-143)	Dipôle RL, Chute verticale (avec frottement, libre) (**)
Collection Durandeau (Hahette)	Dipôle RC (p. 140-141)	Dipôle RL, Chute verticale (avec frottement, libre) (***)

Tableau 12 : Champs d'apparition d'équation différentielle

(*) Le cas de la chute avec frottement en – kv est traité analytiquement ; celui en kv^2 est renvoyé à l'application de la méthode d'Euler.

(**) Le cas avec frottement (en kv) donne lieu à une équation différentielle, mais qui n'est pas traitée analytiquement (elle sert de support à l'introduction de la méthode d'Euler).

(***) Les cas avec frottement en kv et en kv^2 font l'objet d'une étude analytique. Cette étude est généralisée au cas kv^n dans le cas des travaux pratiques avec utilisation de la méthode d'Euler.

Remarque :

la présence d'équations différentielles du premier ordre dans le cadre de la mécanique newtonienne gouvernée par un énoncé portant sur l'accélération vient de ce que l'on considère la variable vitesse. Ceci est justifié dans le cas des forces de "frottement fluide" puisque celles-ci dépendent précisément de la vitesse.

Le cas de la chute freinée par une force de "résistance" du fluide se traduisant par une dépendance en v^2 justifie le recours à une méthode numérique au niveau de la terminale. Une force de frottement (type visqueux, en v) peut être traitée analytiquement.

Le cas de la chute libre est un cas intéressant par ailleurs, car la relation $a = d^2z/dt^2 = -g$ (par exemple) n'est pas nécessairement considérée comme une équation différentielle et est parfois traitée par double primitivation[39] (d'où l'absence, dans certains ouvrages, de ce thème au titre des équations différentielles).

III.1.3. L'extension de l'outil "équation différentielle"

On a évoqué précédemment le fait que, dans les anciens programmes, l'outil équation différentielle[40] arrivait juste au moment de l'étude des oscillations, mais ceci avait fondamentalement changé dans les nouveaux programmes ; cette nouveauté est caractérisée par l'introduction des équations différentielles du premier ordre pour étudier des phénomènes continus en électricité et en mécanique.

L'un des points intéressants est de voir comment sont traitées les classiques équations du mouvement dans le champ de pesanteur, lorsqu'en fin d'année on applique la deuxième loi de Newton. A la lumière des contenus des manuels, plusieurs points de vue peuvent être signalés. La notion de point de vue que nous utilisons ici est utilisée par plusieurs auteurs en didactique des mathématiques et renvoie à des acceptions similaires (Robert & Tenaud 1989, Castella 1995, Trouche 1996, Rogalski 1998). Elle est à prendre au sens où Rogalski la présente, c'est-à-dire la manière de regarder un objet mathématique, de le faire fonctionner voire de le définir.

Dans certains ouvrages, tel chez Hatier (Microméga 2002), l'analyse de la chute libre verticale conduit à des expressions du type $\frac{dv_z}{dt} = g$, explicitement considérées comme des équations différentielles, pour lesquelles une solution de la forme $v_z = gt + k$ est donnée à vérifier, avec détermination de la constante en fonction des conditions initiales. On sait que, dans les manuels de mathématiques, l'objet $y' = f(x)$ est traité dans le cadre des primitives (primitivation). C'est donc là un « point de vue » de la physique qui est exprimé.

Dans d'autres ouvrages (Belin), si l'expression "équation différentielle" est bien utilisée dans le cas de l'expression $\frac{dv_z}{dt} = g$, le discours est ensuite très proche d'une formulation en tant

39 Nous rappelons ici que la primitivation est considérée dans les manuels de mathématiques comme la résolution d'une équation différentielle (ED). Une première approche de la notion d'équation différentielle se fait en classe de première.

40 Il s'agit de l'équation différentielle du second ordre, le seul type qui était étudié jusqu'en 2001.

que recherche de primitive d'une fonction, et donc implicitement en intégrant le second membre...

Synthèse

D'après le tableau, on peut constater que c'est à propos du dipôle RC en électricité que les équations différentielles apparaissent pour la première fois (lieu de "première rencontre"). L'une des raisons est, sans doute, la position de ce chapitre dans la progression retenue par les concepteurs de programmes scolaires, et ceci est conforme à la lettre du programme paru au Bulletin officiel.

Hormis le manuel Microméga, l'étude des équations différentielles dans les autres manuels analysés n'est pas abordée dans le domaine de la radioactivité. Ceci marque un décalage avec les indications données dans les documents d'accompagnement[41] des programmes de mathématiques, mais aussi avec les manuels de mathématiques, qui accordent une place assez importante au domaine de la radioactivité, à la fois pour l'étude des équations différentielles et pour la visibilité de la continuité didactique entre les mathématiques et la physique.

III.1.4. Le nombre d'exercices par chapitre concerné

Nous avons ensuite relevé le nombre d'exercices portant sur une équation différentielle du premier ordre dans chacun des ouvrages.

Pour faciliter la lecture, un même tableau a été utilisé pour les différents ouvrages sur la base de l'ensemble des possibles. Ce tableau ne respecte donc pas nécessairement l'ordre des thèmes/chapitres (notamment la place du chapitre « radioactivité ») et certaines lignes apparaissent ainsi avec des zéros en fonction des choix des auteurs (cf. tableau précédent).

Pour chaque manuel, la première colonne "Total exos" représente le nombre total des exercices par rapport au chapitre ou thème correspondant. La deuxième colonne indique le nombre d'exercices portant uniquement sur les équations différentielles du premier ordre.

41 Sachant que ces documents n'ont été diffusés qu'après la sortie des programmes eux-mêmes.

	Microméga		Parisi		Galiléo		Hélios		Tomasino	
Titre chapitre/thème	Total exos	avec ED	Total exos	avec ED	Total exos	avec ED	Total exos	avec ED	Total exos	avec ED
Loi de décroissance	20	0	12	0 (****)	13	0	11	0	18	0
Dipôle RC	9	4	11	3	8	5	7	2	11	2
Dipôle RL	9	3	10	3	4	2	6	2	12	2
Chute verticale avec frottement en kv	6	3	2	1 (**)	3	1	4	1	3	2**
Chute verticale avec frottement en kv^2	2	0(1**)	4	0	4	2	4	4*	2	2***
Chute libre	6	0	19	0 (***)	6	0	3	0	5	1

Tableau 13 : Nombre total d'exercices sur les équations différentielles dans les manuels

a) Commentaires en rapport avec les indications du tableau.

Collection Microméga

* ne sont pas comptés les quelques exercices "3*" qui sont mis dans la catégorie "Aller plus loin".

** exercice dans lequel on établit l'équation différentielle, mais sans la nommer, et dont on donne "les" solutions, c'est-à-dire v(t) et x(t)

Collection Parisi

(*) on ne comptabilise pas les exercices sur les propriétés des condensateurs/bobines

(**) exercice classé 3*

(***) ni la tâche "établir l'équation différentielle", ni même l'expression "équation différentielle", n'apparaissent dans les exercices. La majorité repose sur "l'établissement d'une loi horaire" (qui passe par la primitivation de l'accélération).

(****) De nombreux exercices reposent sur la loi de décroissance exponentielle, et plusieurs exercices mettent en relation l'activité A et le nombre de noyaux (N(t)), mais sans évoquer le fait qu'il s'agit d'une équation différentielle (car A = -dN/dt) .

Collection Hélios

* Mais … 1 avec traitement numérique explicite par méthode d'Euler ; 2 où l'on demande seulement la vitesse limite (et pour l'un de représenter v(t) à partir de l'équation différentielle ; asymptote et pente à l'origine). Et 1 où l'équation est écrite sous forme d'équation différentielle du second ordre (en z" fonction de z'^2). 1 exercice dans lequel on établit l'équation différentielle, mais sans la nommer, et dont on donne "les" solutions, c'est -à-dire v(t) et x(t)

Collection Tomasino

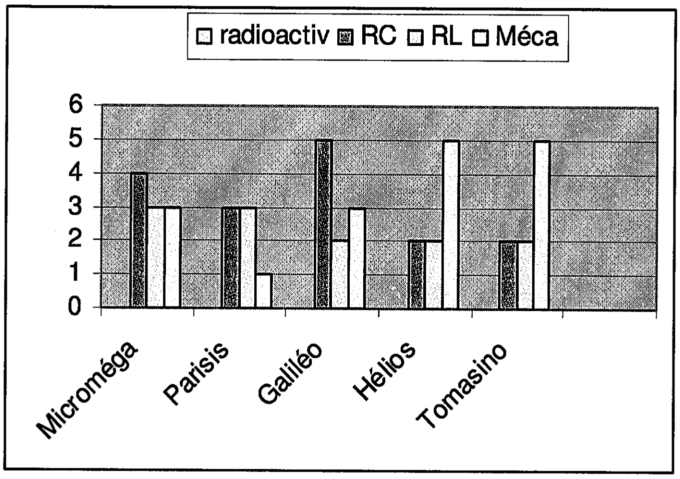
* ne sont pas comptabilisés les (relativement nombreux) exercices "3*", dont une partie est en "problèmes de synthèse".

** Dont 1 avec la méthode d'Euler

*** pas de résolution ; juste considération sur la vitesse limite, en particulier.

b) Synthèse

Pour l'ensemble des manuels, on a relevé 279 exercices concernant les domaines de la physique de la radioactivité, de l'électricité et de la mécanique (REM) dont 45 portent sur les équations différentielles du premier ordre. Dans la plupart des manuels, le domaine de la radioactivité est très peu (voire presque pas) sollicité pour l'étude des équations différentielles. En revanche, c'est en électricité qu'il y a le plus d'exercices, comme le montre le graphique suivant.



Graphique 2 : Nombre d'exercices sur les équations différentielles du premier ordre dans les manuels de physique

Dans les manuels, les exercices sur la radioactivité sont inexistants pour l'étude de l'équation différentielle du premier ordre; ceci rejoint le constat déjà fait dans le paragraphe III. 1. à propos de leur champ de première apparition. Le domaine de l'électricité (dipôles RC et RL) est celui dans lequel on trouve le plus d'exercices (28 au total dans tous les manuels, contre 18 en mécanique).

III.1.5. Les phrases introductives

Dans cette partie, nous avons porté notre attention sur la façon dont l'"objet" très particulier (équation différentielle) est introduit dans le cours, à partir d'un résultat issu de la modélisation, résultant donc des lois de la physique appliquées à un système.

L'est-il de façon progressive, en attirant l'attention sur le fait que les lois donnent ainsi une relation entre la loi d'évolution et sa dérivée (la loi restant inconnue !) ? D'où le concept d'équation différentielle, et éventuellement le recours aux mathématiques.

Ou bien l'est-il de façon très rapide, en disant par exemple, "ceci est une équation différentielle dont la solution est une exponentielle" ? Auquel cas la tâche dévolue à l'élève.

Ou bien encore, l'introduction est-elle du type "établissons l'équation différentielle de l'évolution" ? Ce qui sous-entend que le concept a déjà été vu en mathématiques, *ainsi que sa possible présence en physique* !

Nous avons ainsi relevé les phrases d'introduction, c'est-à-dire les explications ou justifications données au moment de la première apparition de l'équation différentielle du premier ordre. Le résultat portant sur les ouvrages cités précédemment est consigné dans le tableau ci-dessous.

Ouvrages	**Titre et sous-titre du paragraphe**	**Phrase(s) d'introduction**
Micromégà (Hatier)	3.3. Loi de décroissance radioactive (p. 92)	*Lorsque Δt tend vers zéro, la relation.. s'écrit : ...* *La solution de cette équation différentielle est une fonction dont la dérivée est proportionnelle à la fonction elle-même : elle est donc de type exponentiel.*
Parisi (Belin)	3. Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension (p. 69) - Établissement de l'équation différentielle	*Avec l'orientation choisie.... l'équation devient...* *On obtient une équation différentielle linéaire du 1er ordre en uc, à coefficients constant et avec un second membre nul.*
Galiléo (Bordas)	3. Étude théorique quantitative (p. 133)	*...Dans cette équation figurent la fonction u(t) et sa dérivée par rapport au temps. La tension doit vérifier cette équation différentielle mais l'équation ne détermine pas complètement u(t).*
Hélios (Hachette)	3.2. étude théorique 3.2.1. Les équations différentielles	*Les équations différentielles permettent d'exprimer la tension... et la charge... condensateur....**
Tomasino (Nathan)	4.2. Étude théorique - Établissement de l'équation différentielle (p. 143)	*... En introduisant cette expression dans la relation précédente, nous obtenons l'équation différentielle :...*
Durandeau (Hahette)	3.3. Étude théorique - Équation différentielle (p. 140)	*Établissons l'équation différentielle permettant de déterminer la tension aux bornes du condensateur**
Bréal	2.2. Charge du condensateur Équation différentielle vérifiée par la tension	*... On reconnaît une équation différentielle du premier ordre en uc dont la solution est du type : ...*

Tableau 14 : Phrases d'introduction

* Nous attirons l'attention sur le fait qu'il n'y a pas de guillemets au début et qu'il s'agit donc de la première phrase du paragraphe dont le titre / sous-titre est donné.

On constate donc que, dans la majorité des ouvrages, aucune précaution oratoire n'est prise ; de même, aucune présentation quant au caractère fonctionnel de l'équation obtenue à l'issue de l'application des lois de l'électrocinétique n'est donnée, aucun commentaire de ce type une fois l'équation obtenue, ne suit. L'expression "équation différentielle" est dans le titre, et la première phrase est de dire « établissons l'équation différentielle… »

III.1.6. La référence aux mathématiques

Nous avons également cherché et relevé les mentions / renvois faites / faits au programme ou au contenu de mathématiques à ce niveau.

Ces renvois peuvent porter *a priori* sur le rappel de ce qu'est une équation différentielle, sur les notations utilisées en mathématiques, sur la solution donnée par les mathématiciens à ce type d'équation, et en particulier sur l'existence d'une nouvelle fonction : l'exponentielle.

Il y a lieu en effet de travailler la continuité mathématiques – physique à ce niveau, puisque l'équation différentielle du "physicien" s'écrit systématiquement sous une forme du type : $\tau\frac{du}{dt}+u=cte$ (la fonction recherchée pouvant être *u*, ou *i*, *ou v*...), alors que l'écriture consacrée par l'usage en mathématiques est $y' = ay + b$. On notera le changement de notations, mais aussi le "changement de membre" du terme comportant la fonction, changement d'autant plus délicat que le changement de signe de a n'est pas anodin en physique : *l'exposant de l'exponentielle solution* est toujours négatif !

Le tableau ci-dessous contient le relevé des éléments – phrase, expression mathématique – figurant dans chacun des ouvrages ainsi que, si nécessaire, la place – dans le texte, dans la marge – donnée à cette information

Ouvrage	**Texte**	**Place / articulation**
Bréal	*La fonction exponentielle est telle que son taux de variation (sa dérivée) est proportionnelle à elle-même. L'équation différentielle du premier ordre (mettant en jeu une dérivée première) précédemment établie admet donc une solution exponentielle.*	En marge
Microméga	*lorsque Δt est très petit on peut utiliser l'écriture différentielle dN = -λN(t)dt* *La solution de cette équation différentielle est une fonction dont la dérivée est proportionnelle à la fonction elle-même : elle est donc de type exponentiel*	en marge dans le texte
Durandeau (Hahette)	*On montre, en mathématiques, que la solution de cette équation différentielle est :...*	Dans le texte
Tomasino (Nathan)	Aucune	
Hélios (Hachette)	*Il est montré en mathématiques que ces équations ont pour solution...*	Dans le texte
Galiléo (Bordas)	aucune	
Parisi (Belin)	*On obtient une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants et avec un second membre non nul.*	Dans le texte

Tableau 15: Phrases d'introduction des solutions d'équations différentielles

On remarque l'absence d'évocation des mathématiques dans certains ouvrages, ou bien une évocation implicite fondée sur l'utilisation d'un vocabulaire mathématique malheureusement parfois incompatible avec les programmes de mathématiques du secondaire (Parisi). On remarque aussi que les indications sont souvent sibyllines et, lorsqu'elles sont précisées, ne sont pas nécessairement conformes à ce qui est dit/écrit en mathématiques.

L'absence de lien et d'explicitation, là encore, correspond à l'hypothèse implicite que cela a été vu en mathématiques.

III.1.7. Bilan

Les équations différentielles du premier ordre sont étudiées essentiellement dans trois chapitre : dipôle RC et dipôle RL en électricité et chute libre et chute avec frottement en mécanique. Le nombre d'exercices qui leur est consacré traduit l'importance de la place qui leur est accordée.

Cependant, le lien avec les mathématiques se fait à travers des phrases qui sont trop brèves pour rendre compte de la complexité de l'objet étudié, ou qui sont des renvois au cours de mathématiques. On aurait pu s'attendre à ce que leur première apparition soit accompagnée d'un peu plus de commentaires (notamment sur le caractère fonctionnel de l'équation obtenue à l'issue de l'application des lois de l'électrocinétique), appuyés par des exemples simples de tâches de transition.

III. 2. Le jeu des cadres de rationalité

III.2.1. Problématique et méthodologie

L'analyse que nous présentons ici est similaire à celle menée pour les manuels de mathématiques. Il s'agit de relever les éléments de rationalité (en général implicites), qui permettent le passage de l'énoncé de la situation physique au(x) modèle(s) symbolique(s) et de l'équation différentielle du physicien à l'équation différentielle du mathématicien. La problématique apparaît - suivant notre schéma de modélisation - dans le passage d'une référence expérimentale (en général une expérience avec des mesures) à une modélisation théorique (l'établissement de l'équation différentielle) puis à un traitement mathématique (la résolution mathématique) et enfin dans la confrontation du résultat théorique aux données initiales.

Elle apparaît plus finement dans le "traitement des constantes" : les constantes de l'équation différentielle sont fixées par la modélisation du physicien, leur prise en compte dans la résolution et l'apparition d'une "constante d'intégration" (C) relèvent d'une rationalité mathématique, mais la détermination de cette constante est de nouveau une question de physicien (dépendance des conditions initiales).

Comme dans les manuels de mathématiques, la problématique est aussi celle de la dérivée : sa définition en tant que grandeur à la fois physique et mathématique. Il apparait aussi la dérivée du mathématicien et la dérivée du physicien, avec des sous-champs conceptuels distincts dans les deux domaines.

Dans cette partie, nous présentons notre analyse de ce point de vue, portant sur l'ensemble des thèmes donnant lieu à l'introduction d'une équation différentielle du premier ordre, pour quelques ouvrages de physique de terminale S[42]. L'examen de ces ouvrages nous a rapidement conduit à considérer, à côté du cadre de rationalité mathématique (noté μ), deux cadres de rationalité pour la physique : l'un que l'on peut qualifier de physique expérimentale (description des montages expérimentaux, observations, traitement des données et validations des résultats expérimentaux, noté φexp), et l'autre que l'on qualifie de physique théorique (schémas de circuits, lois de l'électrocinétique, établissement de l'équation différentielle, noté φth).

Nous avons privilégié les ouvrages Micromégа, Parisi, Helios et Bréal en fonction de l'analyse précédente, qui montre une préoccupation minimale de justification des équations. Les paragraphes sont écrits dans l'ordre de l'ouvrage. Les parties en italiques sont des citations de l'ouvrage.

Remarque : nous ne nous sommes intéressés qu'à la démarche de la partie "cours". Très souvent, des activités préparatoires sont présentées en début de chapitre : documents historiques ou fiches de travaux pratiques. Ces activités ne sont pas prises en compte dans notre analyse, sauf, bien évidemment, si la démarche y fait référence explicitement.

III.2.2. Ouvrage Collection Micromégа

Le choix de cet ouvrage parmi ceux cités précédemment réside dans la particularité de son introduction de l'équation différentielle du premier ordre (en radioactivité).

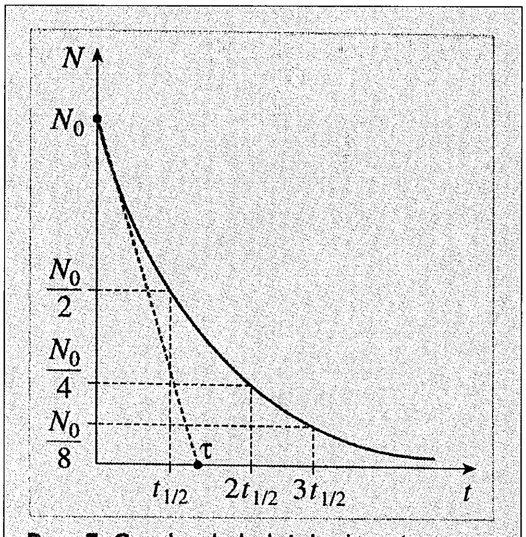
Loi de décroissance

Une activité introductive est proposée, ayant pour objectif d'obtenir la loi d'évolution d'une population de noyaux à partir de l'observation d'une décroissance radioactive. Une description du phénomène est faite, accompagnée des données numériques. Pour trouver l'expression du nombre de noyaux non désintégrés $N(t)$ à la date t, un travail de manipulation de formules mathématiques est proposé. La relation-clé est donnée ; il s'agit de l'approximation « $N'(t) = \mathrm{d}N(t)/\mathrm{d}t \approx \Delta N(t)/\Delta t$ avec Δt très petit » qui symbolise théoriquement le passage au modèle mathématique, mais aussi le passage du discret (valeurs numériques) au continu (fonction N traduisant la loi de la décroissance radioactive).

---

42 Notre objectif ici n'est pas une comparaison des ouvrages sur la base d'une analyse systématique, mais seulement de montrer, sur quelques exemples typiques, les problèmes soulevés par l'intrication mathématiques - physique dans la rationalité du raisonnement.

Dans la partie "cours", la définition de la loi de décroissance radioactive s'appuie sur l'établissement d'une équation différentielle.

φth	- Rappel sur le caractère aléatoire d'une désintégration radioactive : - Définition des grandeurs : constante radioactive, demi-vie ; constante de temps, activité - Détermination de la loi physique de décroissance radioactive
μ	**Équation différentielle et une solution particulière** Commentaire en marge de la page *:* *« $\Delta N = -\lambda N(t)\Delta t$; lorsque Δt est très petit on peut utiliser l'écriture différentielle $dN = -\lambda N(t)dt$ »* Traduction mathématique de la loi de décroissance radioactive *La relation* $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}+\lambda N(t)=0$ *s'écrit* $\frac{dN(t)}{dt}+\lambda N(t)=0$ *La solution de cette équation différentielle est une fonction dont la dérivée est proportionnelle à la fonction elle-même : elle est donc de type exponentiel.*  **Doc. 7.** Courbe de la loi de décroissance. **Constante de temps (τ)**

Commentaire

La partie "cours" s'appuie essentiellement sur la physique théorique (φth). Aucun retour à la phase expérimentale (φexp) n'est évoqué. La relation qui permet de trouver la constante radioactive est une relation de proportionnalité (mathématique) qui n'est pas justifiée.

D'ailleurs le lien entre le caractère aléatoire du phénomène et la constante radioactive n'est pas immédiatement fait.

Lien avec les mathématiques

Toute la partie théorique du cours utilise des formules mathématiques (pour la définition des grandeurs physiques). Mais le lien entre le cadre de mathématiques et celui de la physique n'est pas toujours évident :

Outre le fait que la relation de proportionnalité $\Delta N = -\lambda N(t)\Delta t$ est rappelée et non justifiée, on remarque le passage subtil de l'écriture (1 ou 3) des différences finies à l'équation différentielle (2 ou 4)

$$\Delta N = -\lambda N(t)\Delta t \quad (1) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}N = -\lambda N(t)\mathrm{d}t \quad (2)$$

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} + \lambda N(t) = 0 \quad (3) \quad \Rightarrow \quad \frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t) = 0 \quad (4)$$

Comment peut-on expliquer le passage de (1) à (2) ou bien de (3) à (4), (quand Δt est petit)[43], si l'on se réfère à l'activité introductive (p. 87) dans laquelle on considère que

« *$N'(t) = dN(t)/dt \approx \Delta N(t)/\Delta t$ avec Δt très petit* » ?

Il semble bien s'agir ici d'un jeu d'écriture, car il y a des questions mathématiques qui ne sont pas posées, en particulier celle de l'existence de la dérivée. Tout se passe comme si le physicien faisait l'hypothèse de travail de la dérivabilité des fonctions du temps qui interviennent, cette hypothèse étant considérée comme confirmée si les résultats théoriques correspondent à l'observation. Mais n'est-il intéressant d'expliciter cette hypothèse de modélisation aux élèves ?

Par ailleurs, comment interpréter les égalités dans les relations (1) et (3) ?

Si l'on suppose que la relation de proportionnalité annoncée (1) vient de l'observation de l'évolution de désintégration de noyaux radioactifs en fonction du temps (physique expérimentale), alors le passage (ambigu) à la forme différentielle mérite plus de commentaires (en admettant que l'on choisit de travailler sur un modèle d'égalité).

[43] La question peut se poser aussi sur le ΔN ; est-il petit quand Δt est petit ? Peut-il être petit alors que Δt est grand ?

Autour de deux signes : « = » versus « ≈ »

Nous rappelons que nous avons retrouvé cette notation dans le programme de mathématiques ; et, lors de notre analyse des manuels de mathématiques, nous avons signalé la difficulté qui peut apparaître chez les élèves dans la compréhension des différentes étapes, notamment le passage de l'approximation à l'égalité.

L'utilisation du signe d'égalité s'avère alors doublement problématique : la relation (1) devrait être écrite avec un signe ≈ ce qui aurait permis de comprendre le passage à la limite.

Là encore, on aurait pu envisager un travail, destiné à l'élève, qui permettrait de faire explicitement la jonction entre le cadre de rationalité des mathématiques avec les cadres de rationalité de la physique (théorique et expérimentale). Par exemple, un travail autour de l'approximation ou des quantités négligeables en physique peut être amorcé : estimation des erreurs de mesure (relatives, absolues). Ce qui aurait permis de faire un lien, en mathématiques, dans le domaine de l'Analyse, avec la notion de négligeabilité de la quantité $o(\Delta x)$ dans le cas d'une fonction dérivable

$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$ (formule du développement limité d'ordre 1).

Par ailleurs, l'étude de cette partie suppose que l'élève a déjà rencontré la fonction exponentielle en mathématiques. C'est dans ce sens que nous interprétons le « donc » dans l'avant-dernière phrase « … elle est *donc* de type exponentiel » pour parler de la solution de l'équation différentielle (plus tard, loi de décroissance radioactive).

Le concept d'équation différentielle est évoqué dans une seule phrase, et aucun commentaire n'est donné à son sujet.

- ***Dipôle RC***

Le chapitre commence par deux activités dites expérimentales, l'une sur la charge et l'autre sur la décharge d'un condensateur. Des dispositifs expérimentaux sont donnés par des schémas (φexp). Un lien avec la physique théorique (φth) est fait à travers des questions où l'on demande par exemple de donner l'allure de la courbe, de déterminer l'expression de la charge du condensateur, la relation qui lie la charge du condensateur et la tension à ses bornes …

Mais quelle articulation avec le cours ?

φth	**Définitions et relations entre les grandeurs :** **Établissement de l'équation différentielle** *Réponse à un échelon de tension :* - Rappel des grandeurs électriques en régime transitoire ; courbes de l'évolution de la tension aux bornes du condensateur. - schéma du circuit avec indication des flèches de tension et de courant. Application de la loi du condensateur et de l'additivité des tensions - équation différentielle sur u_c : $U = RC\frac{du_c}{dt} + u_c$ (1)
μ	Résolution analytique de la charge [44] du condensateur : $U = RC\frac{du_c}{dt} + u_c$ soit $\frac{duc}{dt} = -\frac{uc}{RC} + \frac{U}{RC}$ Solution analytique *Vérifions que la solution analytique $Uc = Ae^{\alpha t} + B$ satisfait cette équation. En remplaçant...* *Note dans la marge : L'équation différentielle $y' = \alpha y + \beta$ a pour solution $y = Ae^{\alpha t} + B$*

Commentaires

Jeu de cadres de rationalité : physique théorique et physique expérimentale

Le jeu de cadres de rationalité de la physique théorique (φth) et de la physique expérimentale (φexp) n'apparaît pas dans cette partie. Seul le premier cadre (φth) est convoqué pour introduire et définir les grandeurs physiques.

En revanche, la relation entre les grandeurs donne lieu à l'établissement de l'équation différentielle "de la charge" ou "de la décharge". C'est le point de jonction entre les cadres de rationalité des mathématiques et de physique (théorique).

Comparativement à l'introduction de l'écriture de l'équation différentielle dans le chapitre sur la radioactivité, on constate ici que l'établissement de l'équation différentielle ne passe pas par une écriture des accroissements. Elle résulte de l'application de la loi d'additivité des tensions aux bornes d'un condensateur, l'apparition de la dérivée résultant elle-même des propriétés du condensateur et de la "définition" de l'intensité comme flux de charge par unité de temps. La question du passage du sens physique à la formulation mathématique est donc en

[44] La phrase « résolution analytique de la charge... » relève d'un abus de formulation. Il convient de parler de la résolution d'une équation différentielle (de la charge du condensateur).

principe traitée en amont. La manipulation des relations apparaît alors ici, pour une bonne part, comme purement symbolique

Cet aspect "symbolique" est d'ailleurs patent dans la présentation qui met sur le même plan les deux formes de la relation sans préciser le pourquoi, le lien étant implicite avec la note en marge concernant la forme prototypique de l'équation différentielle du premier ordre en mathématiques. Examinons de plus près ce rapprochement ;

Jeu de cadre de rationalité : mathématiques et physique

L'extrait de manuel ci-dessous présente la manière dont l'équation différentielle du premier ordre est traitée (établissement et résolution).

3.3. Résolution analytique de la charge du condensateur

• **Équation différentielle**

Pour charger le condensateur, on soumet le dipôle RC à un échelon de tension. À un instant choisi comme origine des temps ($t = 0$), la valeur de la tension u aux bornes de l'association RC passe brusquement de 0 à U. La relation (1) permet d'établir **l'équation différentielle de charge :**

$$U = RC\frac{du_C}{dt} + u_C \quad \text{soit} \quad \frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{RC} + \frac{U}{RC} \qquad (2)$$

L'équation différentielle $y' = \alpha y + \beta$ a pour solution $y = Ae^{\alpha x} + B$, A, B et α étant des constantes.

• **Solution analytique**

Vérifions que la solution analytique $u_C = Ae^{\alpha t} + B$, où A, B et α sont des constantes, satisfait cette équation.

En remplaçant, dans **(2)**, u_C et sa dérivée par leur expression, on obtient :

$$\alpha Ae^{\alpha t} = -\frac{1}{RC}(Ae^{\alpha t} + B) + \frac{U}{RC}$$

Puis :
$$\left(\alpha + \frac{1}{RC}\right)Ae^{\alpha t} = \frac{1}{RC}(U - B)$$

Les deux membres de cette équation ne peuvent être égaux, quelle que soit la valeur de t, que s'ils sont nuls ; A ne pouvant être nul, on a :

$$\left(\alpha + \frac{1}{RC}\right) = 0 \quad \text{et} \quad (U - B) = 0, \quad \text{d'où} \quad \alpha = -\frac{1}{RC} \quad \text{et} \quad B = U$$

La solution satisfaisant à l'équation différentielle de la charge est :

$$u_C = Ae^{\frac{-t}{RC}} + U$$

Des éléments du cadre de la physique permettent d'établir l'équation différentielle (du physicien) $\frac{duc}{dt} = -\frac{uc}{RC} + \frac{U}{RC}$.

Le texte présenté en marge de la page (à droite) doit normalement servir (et inciter) à la transition physique-mathématiques (PM). Cette tâche de mise en correspondance des éléments de chaque terme n'est pas faite, mais laissée à la charge de l'enseignant.

La correspondance entre les solutions "mathématique" $y = Ae^{\alpha x}+B$ et "physique" $Uc = Ae^{\alpha t} + B$ ne devrait pas normalement poser de problème majeur. Mais une confusion qui peut être gênante existe en ce qui concerne les « constantes » de l'énoncé. A, B et α sont cités comme des constantes satisfaisant cette équation, mais en réalité α est donné et B est obtenu directement à partir des coefficients de l'équation. La seule constante (d'intégration) à déterminer est A ; elle dépend des conditions initiales.

On peut aussi remarquer que la phrase (P) « vérifions que la solution … satisfait cette équation » est fausse du point de vue logique, à moins d'introduire l'assertion « toutes les solutions de l'équation sont de la forme $t \longrightarrow \mathrm{A}e^{\alpha t} + \mathrm{B}$ ». Il faut donc supposer que l'auteur de l'énoncé fait cette hypothèse implicite, qui est totalement opaque pour l'élève.

De plus, le fait de nommer déjà, dans la phrase (P) de "la solution", la fonction candidate à vérifier l'équation différentielle, ne convient pas. C'est comme si on le savait d'avance que c'est **la** solution et donc **l'unique** qui convient pour cette équation différentielle. Il aurait fallu utiliser le mot "fonction" à la place de "solution analytique $Uc = Ae^{\alpha t} + B$".

Démarche de validation

Nous avons voulu savoir quelle est la démarche de validation entreprise ici pour vérifier que $Uc = Ae^{\alpha t} + B$ est solution de l'équation différentielle $\frac{duc}{dt} = -\frac{uc}{RC} + \frac{U}{RC}$ (2)

On peut signaler une difficulté qui apparaît très vite. Les coefficients A, B et le nombre α ne sont pas indiqués dans la fonction U_c. On voit alors mal comment une telle vérification peut être possible.

Finalement, ce qui est fait, c'est la détermination des valeurs de B et de α pour que la fonction de la forme $Uc = Ae^{\alpha t} + B$ soit solution de l'équation différentielle donnée. Il y a là donc un problème de formulation. Au lieu d'une vérification, comme il est annoncé, c'est plutôt un théorème sous-jacent qui est utilisé. La formulation serait :

« Cherchons les valeurs de α et B pour que la fonction de type (ou définie par) $Uc = Ae^{\alpha t} + B$ soit solution de l'équation différentielle $\frac{duc}{dt} = -\frac{uc}{RC} + \frac{U}{RC}$ »

Comment sont déterminées les valeurs de α et de B ?

En remplaçant la fonction U_c dans l'équation (2), on obtient : $(\alpha+\frac{1}{RC})Ae^{\alpha t}=\frac{1}{RC}(U-B)$

De là on passe à : $(\alpha+\frac{1}{RC})=0$ et $(U-B)=0$, d'où $\alpha=\frac{1}{RC}$ et $B=U$

Comment un enseignant de physique fait-il pour expliquer cette technique/ technologie à ses élèves ? La technique mathématique n'est pas triviale. Pour montrer que $\mathrm{P}\,e^{\alpha t}=\mathrm{Q}$ implique P = Q = 0, on peut par exemple faire $t = 0$ (ce qui fournit P = Q), puis $t = -\infty$ (ce qui fournit Q = 0). Mais comment s'y prend le professeur de physique ? En outre, sur quoi s'appuie-t-il pour affirmer « A ne pouvant être nul » ? Sur la situation physique ? Sur le bon sens ? C'est normalement en référence à l'expérience qui montre que la tension est bien une fonction du temps. Mais malheureusement, ladite référence est absente.

- ***Chute verticale***

	Chute verticale avec frottement	Chute libre verticale
φexp	- Photographie et schéma du dispositif expérimental (Doc. 2 et 3) - Acquisition et traitement des données (vidéo) (Doc.1) - utilisation d'un logiciel (tableur) - pas de courbes données ni à construire	- photographie des dispositifs expérimentaux (Doc. 1 et 2) - Mise en évidence de la force de frottement et mesure des vitesses limites (en fonction de la nature du fluide et du rayon du corps) - utilisation d'un logiciel (tableur) - demande de détermination de la valeur de la vitesse à chaque instant et de son expression - pas de courbes données ni à construire
φth	Équation différentielle du mouvement - inventaire des forces extérieures - application de la deuxième loi de Newton pour trouver l'équation différentielle du mouvement $mg-\rho_f Vg-6\pi R\eta v_z=m\frac{dv_z}{dt}$ - expression de la vitesse limite	- accélération de la pesanteur - équation horaire du mouvement
µ	Résolution de l'équation différentielle - rappel sur le principe de la méthode d'Euler - résolution de l'équation différentielle ; la solution approchée est présentée dans un tableau (Do. 8) - représentation de la solution dans un graphique : mis en évidence du temps caractéristique	Vitesse du centre d'inertie. *on a* $\overrightarrow{a_G}=g\vec{k}$ *, d'où* $\frac{dv_x}{dt}=0$, $\frac{dv_y}{dt}=0$, $\frac{dv_z}{dt}=g$ *on peut vérifier que ces équations différentielles ont pour solutions* $v_x = A$, $v_y = B$; $v_z = gt$...

Jeu de cadres de rationalité : Chute libre.

Le traitement des questions posées à la fin de l'activité expérimentale sur la vitesse du centre d'inertie doivent permettre de faire un lien entre les parties expérimentale (φexp) et théorique (φth). Même si ce lien n'est pas explicité dans le cours, on peut supposer une tâche demandant la confrontation et l'interprétation des résultats expérimentaux et théoriques.

Cependant, dans la suite (φth), on peut constater que le passage du cadre de la physique au cadre des mathématiques (μ) n'est pas commenté. En effet, il n'y pas d'indications (mathématiques) sur la manière qui permet d'obtenir les trois solutions proposées. On suppose qu'il s'agit pour l'élève de comprendre que la dérivation des "solutions" données permet bien de retrouver les équations différentielles.

III.2.3. Ouvrage Collection Parisi

Remarque : une activité préparatoire, type fiche TP, est présentée avant le cours. L'activité proposée repose sur l'acquisition automatique de données, l'établissement de l'équation différentielle, la confrontation des mesures au modèle exponentiel déduit de l'équation différentielle. Peu de données et peu de graphiques figurent dans cette partie qui n'est d'ailleurs pas toujours évoquée dans le cours.

Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension (p.69-70)

φth Établissement de l'équation différentielle

schéma du circuit avec indication des flèches de tension et de courant.

Application de la loi du condensateur et de l'additivité des tensions

-> équation sur u_c $\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{\tau}u_C=\frac{E}{\tau}$

μ = "équation différentielle linéaire à coefficient constant, second membre non nul".

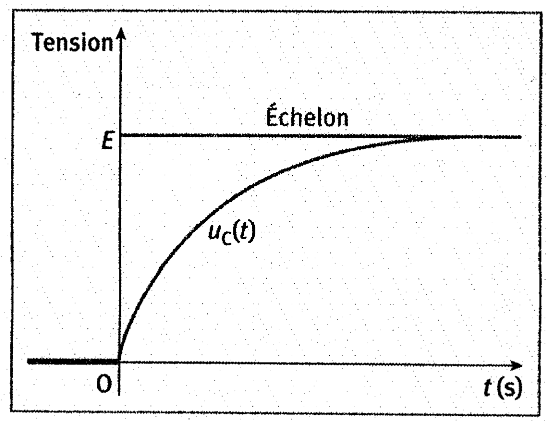
-> équation sur q(t) $\frac{dq}{dt}+\frac{1}{\tau}q=\frac{E}{R}$

La solution peut être proposée sous la forme $u_C(t)=Ae^{-mt}+B$ avec m > 0

Dérivation et report -> B et m ; $u_C(t)=Ae^{-t/\tau}+E$ (solution générale)

détermination de A avec C.I. (l'expérience montre que uc est continu, donc uc(0) = 0

-> $u_C(t)=E(1-e^{-t/\tau})$ fonction croissante de 0 à E ; correspond à la forme de l'oscillogramme Doc. 17



Commentaires : l'entrée est donc purement théorique, ce qui est un choix possible. Connaissant les lois de l'électrocinétique, on peut s'intéresser à ce que dit la théorie si l'on charge un condensateur avec un échelon de tension. Mais l'on s'attend à un retour à l'expérience pour une confrontation réelle. Ici, si la forme est respectée grâce à la dernière phrase, le problème vient de ce que le document 17 n'est pas un élément de la fiche TP introductive, ni même un résultat expérimental : la courbe invoquée est tout ce qu'il y a de plus théorique.

Quant à la partie résolution, là aussi la transition vers un cadre purement mathématique s'effectue sans précaution particulière : l'équation différentielle est qualifiée de "linéaire à coefficient constant, second membre non nul" (expression qui n'est pas utilisée en mathématiques) pour laquelle "la solution peut être proposée..." Pourquoi ?, avec "m > 0" (pour quelle raison) ? La tâche consiste ensuite à déterminer B et m, ceci conduisant à une "solution générale" (c'est-à-dire $u_C(t) = Ae^{-t/\tau} + E$) ; et enfin la détermination de A reposant sur la condition initiale, argumentée par la phrase « l'expérience montre que u_c est continu », formule purement rhétorique puisque expérience il n'y a pas.

○ Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension (p. 88-90)

Le schéma est rigoureusement le même que pour le circuit RC : une fiche de manipulation (p. 86) évoque des mesures, l'établissement de l'équation différentielle, sa solution exponentielle et la modélisation grâce à un logiciel.

Commentaires : l'entrée est donc également purement théorique, ce qui est en cohérence avec l'étude précédente du dipôle RC. On notera la formule rhétorique "on réalise un circuit", qui bien évidemment ne renvoie aucunement à une expérience. De même, en quelque sorte, le retour à l'expérience est bien évoqué et renvoie à la fiche TP introductive, mais celle-ci ne contient aucun résultat expérimental !

Quant à la partie résolution, la structure est strictement identique à l'étude du dipôle RC et aucune explication complémentaire n'est donnée.

o Chute verticale dans un fluide (p 151-152)

Des activités expérimentales (chute dans un fluide visqueux, chute verticale dans l'air d'un boule de polystyrène ; p. 147-149) donnent des informations sur les modalités expérimentales, comportent des graphiques présentés comme expérimentaux, et présentent la méthode d'Euler pour la modélisation. Mais là encore, ces éléments (hormis un détail) ne sont pas évoqués dans la démarche présentée en cours.

φth Équation différentielle du mouvement

Bilan des forces, application de la deuxième loi de Newton -> équation différentielle du mouvement :

$$m\frac{dv}{dt} = (m - m_{fluide})g - f(v)$$

Considérations sur la vitesse limite ; "la vitesse augmente avec le temps" + évocation de la courbe "expérimentale" de la fiche TP n° 2.

Insistance sur le régime asymptotique, dit régime "permanent".

Méthode d'Euler -> influence du pas.

Commentaires : l'une des difficultés de cette partie vient de ce que le modèle *f*(*v*) reste non précisé : juste à la fin, il est dit : "pour établir l'équation différentielle il faut proposer un modèle..."(p. 154).

L'approche est donc purement "physique théorique", l'évocation des données expérimentales se limitant au constat d'une vitesse limite (la courbe dite expérimentale n'ayant pas l'air expérimental !), le commentaire sur à la vitesse qui "augmente" étant mal placé, puisqu'en l'absence de conditions expérimentales rien ne peut être dit à ce sujet[45].

La méthode d'Euler (sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre suivant) apparaît donc ici comme le moyen de manipulation du modèle.

○ Remarque : Chute libre (p. 154-155)

Un TP (p. 149) donne la courbe dite "expérimentale" de z(t). L'application de la seconde loi de Newton est présentée comme donnant lieu à 3 "équations différentielles",

$\frac{dv_z}{dt} = -g \quad ; \frac{dv_y}{dt} = 0 \; ; \frac{dv_x}{dt} = 0$ dont la résolution fait implicitement référence à la primitivation : on recherche la fonction dont la dérivée est "– g" : $v_z(t) = -gt + C_1$

Suite à cette relation (formule de $v(t)$), un "exemple" est donné, avec un graphique dans la marge représentant des points et une droite "moyenne". Les points (v, t) sont dits issus du TP préliminaire mais ledit TP ne les donne pas. De plus, la droite moyenne est tracée sans aucune information (régression linéaire ?)

De même, suite à la dernière relation $z(t) = -1/2gt^2+C_1t+C_2$, l'exemple du TP préparatoire est évoqué : « la courbe représentative de $z(t)$ est modélisée par une parabole ...soit $g = 9{,}92$ m.s^{-2}, ce qui est acceptable...». Or, comme indiqué précédemment, ladite courbe expérimentale ressemble déjà fort à une parabole théorique. De plus, aucune information n'est donnée quant à la « modélisation par une parabole ».

Le recours/retour au domaine expérimental n'est donc que purement rhétorique.

○ *Loi de décroissance radioactive (p. 271)*

φth La probabilité .. proportionnelle à Δt : $-\frac{\Delta N}{N} = +\lambda \Delta t$ ... s'écrit également $\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N$

... Pour un intervalle de temps tendant vers 0, la relation s'écrit $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$

μ *C'est une équation différentielle (cf. cours de mathématiques).*

---

45 La bille peut en effet être lancée et, si sa vitesse initiale est supérieure à la vitesse limite, ladite vitesse diminue ! C'est le cas du parachutiste au moment où il ouvre son parachute.

Sa résolution permet d'obtenir $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

Commentaire : l'approche "physique théorique" est de nouveau confirmée, le passage au registre mathématique apparaissant en dernier lieu. L'obtention de la classique loi de décroissance apparaît bien comme la seule finalité de cette partie.

Commentaire général

On constate donc dans cet ouvrage que les activités expérimentales font l'objet de "fiches" de consignes, parfois sans indication de résultats expérimentaux, qui ne servent pas d'appui explicite à la partie "cours". Le cours apparaît donc clairement comme relevant de considérations théoriques : c'est une partie "physique théorique" qui s'appuie sur les lois et les principes, et présente la modélisation de systèmes.

Les écritures purement formelles permettent aux auteurs de passer dans le registre mathématique sans précautions particulières. Pour autant, on peut douter que les élèves suivent ledit changement.

III.2.4. Ouvrage éditions Bréal

Remarque préliminaire : l'ouvrage introduit explicitement l'équation différentielle dans le cours sur le dipôle RC. Toutefois, dans le chapitre "radioactivité" qui précède, une écriture différentielle est utilisée : $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$ (p. 105), suivie de : "par intégration on obtient [...] loi de décroissance : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ ".

Seule "explication" dans la marge « mathématiques : en intégrant [on obtient] $\ln N(t) = -\lambda t + \text{Cte}$ ».

Outre le fait que l'équation différentielle est éludée, on ne peut que s'interroger sur la compréhension par les élèves de la notation différentielle, de la forme "dérivée logarithmique" et de "l'intégration" ainsi parachutée.

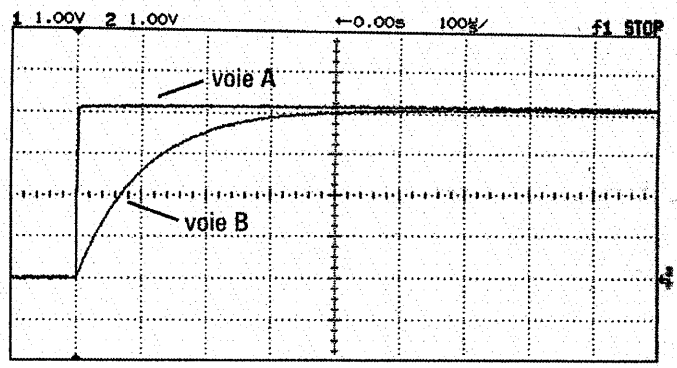
a) Réponse en tension d'un condensateur (p. 154)

φexp Étude expérimentale :

Schéma d'un circuit avec indication des branchements de l'oscilloscope et photographie du montage correspondant.

Explication des manipulations et observations.

Reproduction de courbes de charge et décharge du condensateur (doc. 15 et 16).



φth Équation différentielle vérifiée par u_C

nouveau schéma du circuit avec indication des flèches de tension et de courant.

Application de la loi d'additivité des tensions : $RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=E$

μ On reconnaît une équation différentielle dont la solution est de la forme $u_C(t)=Ae^{kt}+B$

détermination des constantes par dérivation et report dans l'équation différentielle : B et k sont des constantes connues; Les conditions initiales permettent de déterminer la valeur de A

? interprétation physique : si t tend à infini u_c converge vers la valeur E, et ceci est en accord avec le document expérimental (doc. 15).

Commentaires :

La présentation commence par une étude expérimentale qui débouche sur des courbes de charge et décharge. Le seul commentaire sur ces courbes est l'existence d'une phase transitoire et d'un régime permanent.

Le passage à l'étude théorique ne se fait sans aucune référence à cette phénoménologie. On suppose que l'élève s'attend naturellement (coutume didactique ?) à ce que la théorie qu'on va développer concerne ce qui vient d'être fait.

L'obtention de l'équation différentielle relève d'une physique purement théorique.

Celle-ci obtenue, aucun commentaire ni aucune considération qualitative ou semi-quantitative ne sont donnés quant au comportement attendu et/ou à la référence à l'expérience.

Le discours bascule directement dans le registre mathématique : « on reconnaît une ED... »

Ensuite, la détermination des trois constantes fait l'objet d'un même paragraphe qui rassemble un jeu de manipulations algébriques. Le cas de la constante *A*, qui est fixée par les conditions initiales, ne ressort pas, ni du point de vue de la physique, ni du point de vue mathématique (solution particulière parmi un ensemble de solutions).

Enfin, l'interprétation dite "physique" ne propose aucune interprétation ! Le paragraphe se contente de redire qu'il y a un comportement asymptotique (sans d'ailleurs soulever le fait que le modèle dit que le condensateur n'en finit pas de se charger !). Ce dernier paragraphe semble de nature purement rhétorique pour terminer cette partie du cours.

De fait, l'élève est amené à sauter d'un cadre de rationalité à un autre, et se retrouve en quelque sorte nulle part en fin de "monstration".

b) Réponse en courant d'une bobine (p. 175-177)

Le schéma de la progression est identique à celui de l'étude du condensateur.

φexp Étude expérimentale :

Schéma d'un circuit avec indication des branchements de l'oscilloscope et photographie du montage correspondant.

Explication des manipulations et observations.

Reproduction d'établissement et de rupture du courant.

φth Équation différentielle vérifiée par *i*.

Nouveau schéma du circuit avec indication des flèches de tension et de courant.

Application de la loi d'additivité des tensions : $L\frac{di}{dt} + Ri = E$

μ On reconnaît une ED dont la solution est de la forme $i(t) = Ae^{kt} + B$

Détermination des constantes *B*e t *k* par dérivation et report dans l'équation différentielle; La condition initiale permet de d'obtenir *A*.

? interprétation physique : si *t* tend vers infini *i* tend vers *E/R*, la bobine s'oppose à l'augmentation de l'intensité.

Les commentaires suscités par le cas précédent s'appliquent de nouveau ici.

La dernière étape "d'interprétation physique" est encore plus pauvre du point de vue de la démarche, puisqu'il n'y a aucune considération sur le sens physique de la valeur *E/R*.

c) Chute verticale avec frottement (p 253-257)

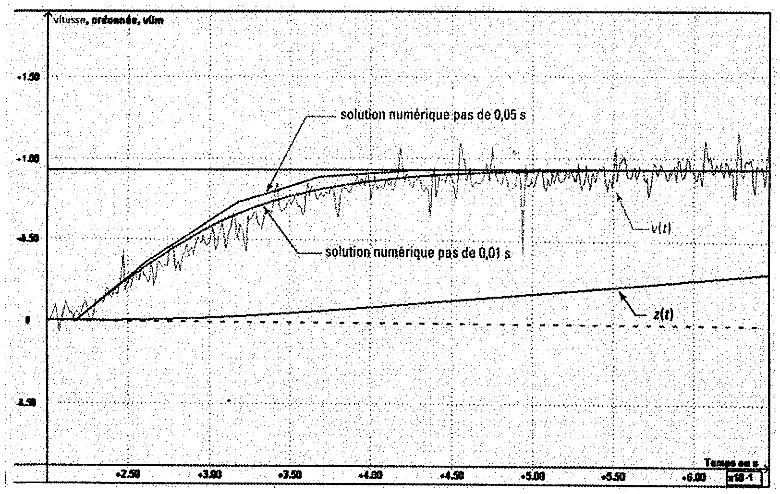
Le cours fait référence, en introduction, à une activité expérimentale préalable (p. 249), que nous incluons donc dans notre tableau.

φexp Étude expérimentale :

Enregistrement informatisé de la chute d'une bille dans un fluide : dessin schématique du montage.

Les mesures permettent de tracer à l'ordinateur les courbes $z(t)$ et $v(t)$

la copie d'écran montre également le modèle exponentiel de $v(t)$.



φth Équation différentielle du mouvement :

Bilan des forces, la seconde loi de Newton donne l'expression de l'accélération $\ddot{z} = g(....) - f/m$

Le cas $f = kv^2$ est choisi et le traitement se fait par la méthode d'Euler ; résolution numérique de l'équation différentielle du premier ordre en v : $m\dot{v} = A - Kv^2$

Confrontation théorie - expérience : importance du pas du calcul ; importance du modèle (comparaison avec le modèle en $-kv$).

La partie cours est donc purement théorique, et le recours aux mathématiques est éludé par l'introduction de la méthode d'Euler. La confrontation à l'expérience est rendue discutable, puisque dans le même temps ont met en cause le calcul !

Enfin, les données brutes sont celles des valeurs de $z(t)$. Or la confrontation a lieu sur $v(t)$, dont on ne précise pas le mode de calcul (dérivation numérique) : les élèves seraient pourtant en droit de s'interroger sur ce que représentent les zig-zags de la courbe $v(t)$.

d) Chute libre (p 257)

Le cours fait suite à la partie précédente et démarre sur l'étude théorique.

φth Équation différentielle du mouvement :

Bilan des forces, seconde loi de Newton donne l'expression de l'accélération $\vec{a} = \vec{g}$

On obtient ensuite les équations différentielles : $\ddot{x} = 0 \quad \ddot{y} = 0 \quad \ddot{z} = g$

μ Équations horaires du mouvement : par intégration $\dot{z} = gt$

Et enfin, par réintégration : z = ...

On remarque donc que les auteurs utilisent ici l'expression "équation différentielle" pour un système d'équations différentielles du second ordre (le cas du second ordre a en principe été vu dans le chapitre précédent, concernant les oscillations électriques).

Leur "résolution" (le mot n'est pas écrit) repose sur la recherche des primitives correspondantes.

Enfin, pas de référence à l'expérience, ni au départ, ni à la fin !

III.2.5. Ouvrage Collection Hélios

L'ouvrage de la collection Hélios place l'étude de la radioactivité parmi les premiers chapitres. Aucune évocation d'équation différentielle au niveau de la loi de décroissance. $A(t)$ est présentée comme la dérivée de la loi exponentielle $N(t)$.

L'ouvrage est conçu avec des fiches "activité" qui précèdent le cours. Ces fiches contiennent la description du protocole expérimental, le schéma des circuits électriques, et des copies d'écran des acquisitions informatisées ou des photographies d'écran d'oscilloscope. Ces activités sont reprises en introduction du développement de la partie "cours".

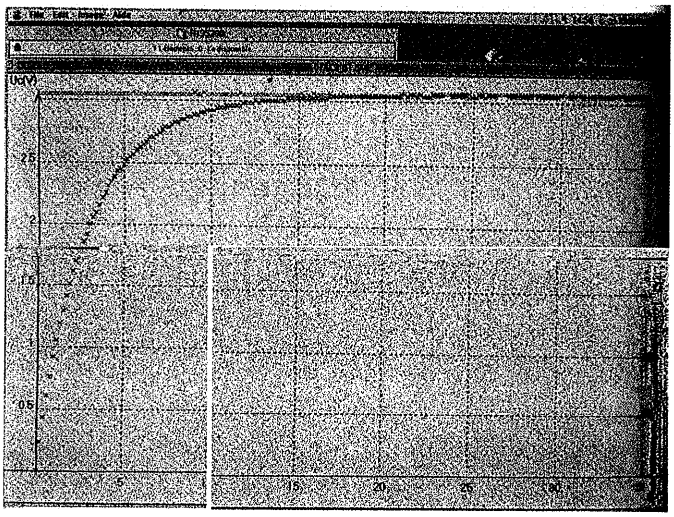
En mécanique, les deux modèles de force (en kv et kv^2) sont étudiés. Le premier donne lieu à la résolution analytique de l'équation différentielle et du calcul de v, la seconde permet d'introduire la méthode d'Euler.

a) Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension (p. 112, 117-118)

φexp Résultat expérimentaux

Montage étudié dans l'activité 3 : schéma du montage avec entrées oscilloscope/carte d'acquisition, copie d'écran des mesures à l'ordinateur.

Commentaire : allure exponentielle



Considérations sur le temps de charge, la tension de charge, l'intensité...

φth Étude théorique

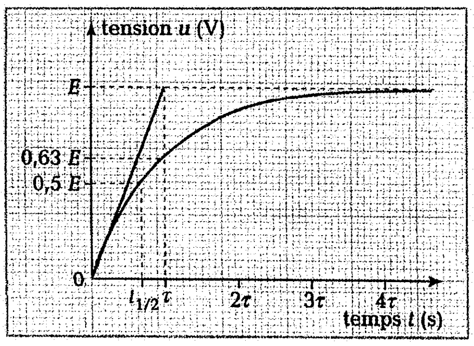
Les équations différentielles.

Schéma du circuit avec indication des flèches de tension et de courant.

Application de la loi du condensateur et de l'additivité des tensions

Equation sur u : $RC\dfrac{du}{dt}+u \ = E$

μ



Equation sur q(t) : $\tau\dfrac{dq}{dt}+q=q_0$

Il est montré en mathématiques que ces équations ont pour solution :

$u(t)=E(1-e^{-t/\tau})$. idem pour q(t)

Ces équations horaires vérifient bien les conditions extrémales.

voir doc. 16 et 19.

Commentaires :

La référence à la courbe expérimentale permet aux auteurs de parler de l'allure exponentielle. Ceci est révélateur d'une terminologie traditionnelle de "physicien". Outre le fait qu'il est probablement prématuré de parler d'exponentielle pour les élèves, il est assez difficile de voir où est l'exponentielle dans cette courbe ![46]

L'allure est tellement exponentielle que les auteurs introduisent d'emblée une durée $t½$ telle que $u(t½) = E/2$; "*cette durée correspond à la demi-vie définie en radioactivité par* $t½ = \tau.\ln 2$". Mais, curieusement, au moment de la présentation de la solution de l'équation différentielle, aucune référence n'est faite à ladite courbe exponentielle !

La confrontation à l'expérience se mue en "vérifie bien les conditions extrémales", ce qui est accompagné d'un renvoi à une courbe (doc.16), courbe qui n'a pas l'air vraiment expérimental, et sur laquelle il est impossible d'estimer les 63 % !

Remarque : il est particulièrement mal venu de prendre q_o comme symbole de la constante pour la loi de charge, puisque $q(t = 0) = 0$! (C'est q_{max} qu'il aurait fallu mettre). De même, la question des conditions extrémales pour un problème de type Cauchy doit faire grincer les mathématiciens...

b) Dipôle RL soumis à un échelon de tension (p. 132, 134-135)

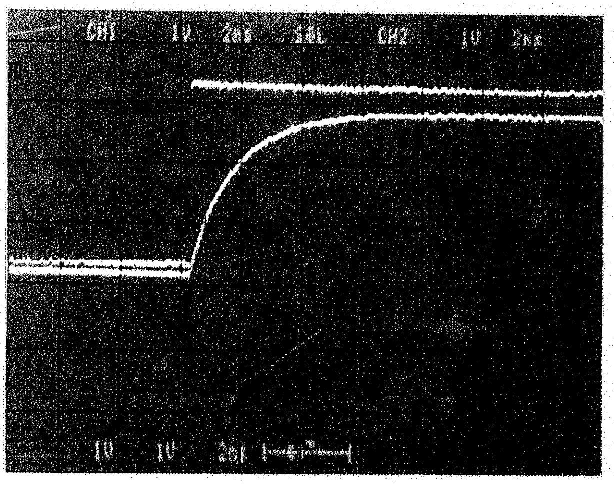
Une activité porte sur ce phénomène, mais n'est pas évoquée dans la partie "cours".

φexp Résultat expérimentaux

Schéma du montage avec entrées oscilloscope, photographies d'écran de l'oscilloscope.

Commentaire : allure exponentielle

46 Puisqu'il s'agit d'une exponentielle décroissante "cachée" dans une fonction croissante...



Et "dans une bobine, l'intensité du courant ne subit pas de discontinuité".

Considérations sur la constante de temps.

φth Étude analytique

Détermination de l'équation différentielle

Schéma du circuit avec indication du sens du courant.

Application de la loi du condensateur et de l'additivité des tensions

Equation sur u : $L\frac{di}{dt} + Ri = E$

μ Solution de l'équation différentielle.

Une des solutions est de la forme : $i = a.e^{-t/\tau} + i_0$

condition initiale $i = i_0(1 - .e^{-t/\tau})$

L'intensité tend exponentiellement vers une valeur limite

φ? celle de l'intensité du courant ... régime permanent... En effet, à cet instant, la bobine se comporte comme un conducteur ohmique

Commentaires :

On s'interroge sur l'expression « une des solutions est de la forme... » qui laisse sous-entendre qu'il y aurait d'autres types de solution. Là encore, aucun appui sur les données expérimentales, ni même sur les résultats de l'étude du circuit RC qui a donné des courbes du même type et une équation différentielle du même type.

Les commentaires finaux portent toujours sur la valeur limite, avec une maladresse d'expression qui fait dire aux auteurs « à cet instant » (alors qu'il est impossible de séparer les régimes initial et permanent). De plus, ce retour à la physique est pour le moins discutable, puisque la phrase « se comporte comme un conducteur ohmique » ne correspond à aucune observation expérimentale (la phrase contraire étant en exergue de l'activité TP n°2).

c) Chute verticale avec frottements (p 192-193)

Référence à une activité préalable (activité 2, expérience 2, p189), mais sans en faire d'exploitation particulière.

φth Cas de la force de la forme *kv*

Bilan des forces, deuxième loi de Newton

Équation différentielle : $g(1 - r_0/r) - k/m\ v = dv/dt$,

du type de celle vue pour RC et RL donc solution de la forme :

$v = C_1.e^{-\alpha t} + C_2$

La condition initiale permet de trouver : $v = v_l(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

vitesse limite : théoriquement atteinte au bout d'une durée infinie, cependant l'expérience montre que le mouvement est pratiquement uniforme au bout de 5τ.

φth Cas de la force de la forme kv^2 :

Méthode d'Euler

Commentaires

La modélisation de la force de frottement fluide consiste à trouver le modèle le plus pertinent de la force de frottement. Deux types de modèles sont cités. Il s'agit du modèle type $f = kv$ pour les très faibles vitesses et le modèle de type $f = k'v^2$ pour les grandes (ou moyennes) vitesses. La pertinence tient sur l'écart entre les points expérimentaux (obtenus par observation) et les points obtenus par approximation à l'aide de la méthode d'Euler. (Nous reviendrons sur cette comparaison dans le chapitre sur la méthode d'Euler).

La préoccupation est celle de la vitesse limite. On note à ce titre, à la fois la remarque pertinente quant à la durée mathématiquement infinie (ce qui n'avait pas été fait pour la charge du condensateur), et l'ambiguïté de la phrase, qui laisse sous-entendre que l'expérience n'est pas conforme...

Le rappel des équations vues pour RC et RL est intéressant, mais l'on se demande pourquoi la forme générale de la solution n'est pas donnée d'emblée, et pourquoi des constantes C1 et C2 apparaissent ici. Cela dit, l'activité reste dans le cadre de la "physique théorique".

d) Chute verticale libre (p. 194-195)

φth Bilan des forces, deuxième loi de Newton : $\vec{a} = \vec{g}$

Chute sans vitesse initiale :

$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = g$

primitive $v = gt + \mathrm{v}(0)$; ici $v = gt$

De nouveau, primitive : $z = 1/2\ gt^2$

Idem pour chute avec vitesse initiale vers le bas / vers le haut.

Commentaires : le mot "équation différentielle" ne figure pas ici. On procède par primitivation. Aucune évocation de résultats expérimentaux, ni en introduction ni en "conclusion", relativement à l'expression parabolique de $z(t)$.

III.2.6. Bilan

Il apparaît clairement que le jeu de cadres de rationalité ne se fait pas sans difficultés. L'introduction des thèmes (circuits RC ou RL, mécanique, radioactivité) est souvent en rapport avec une étude expérimentale préalable, mais qui ne sert pas d'appui, ni de référence, au moment du traitement de l'équation différentielle. L'absence, parfois, de tâche de transition (souvent physique-maths (PM) mais aussi maths–physique (MP)) laisse présager des passages implicites, difficilement exploitables par l'enseignant ou par les élèves.

De plus, l'obtention de l'équation différentielle et la détermination de la solution mathématique apparaissent comme la finalité du travail. Il y a peu de retour au phénomène physique, une fois la solution trouvée. Or, le retour à la confrontation expérimentale et l'analyse "physique" de la solution elle-même peuvent être cruciales et constituer un élément moteur pour la compréhension de cette étude.

Pour les circuits RC et RL, une première difficulté conceptuelle nous semble résider dans l'introduction des "grandeurs dérivées" : l'intensité comme dérivée de la charge du condensateur, et la tension aux bornes de la bobine comme dérivée de l'intensité (à un facteur près). Ces relations posent donc un fort caractère mathématique au raisonnement, avant même l'obtention de l'équation dite différentielle, obtention qui apparaît alors comme le fruit d'une manipulation formelle.

Dans le cas du circuit RC, on note le manque de variété dans les situations étudiées. Par exemple, dans la plupart des situations étudiées, la charge initiale est nulle. Il y a très peu de travail portant sur d'autres cas de charge ou de décharge. Ce type de travail, enrichissant du point de vue de la modélisation, permettrait pourtant de faire apparaître ce qui est de l'ordre des paramètres du système (et en particulier de donner du sens à la fameuse "constante de temps") et ce qui relève des conditions initiales ou aux limites.

En mécanique, l'étude des situations sur la chute des corps dans un fluide conduit à une modélisation des forces de frottement exercées par le fluide. Mais il n'est pas toujours présenté comme une équation différentielle (cas de la chute libre) et n'est pas toujours traité comme le cas RC. Par exemple, dans le cas de modélisation de la force de frottement en kv^n, un recours à l'approche numérique est envisagé, sans parfois dire pourquoi.

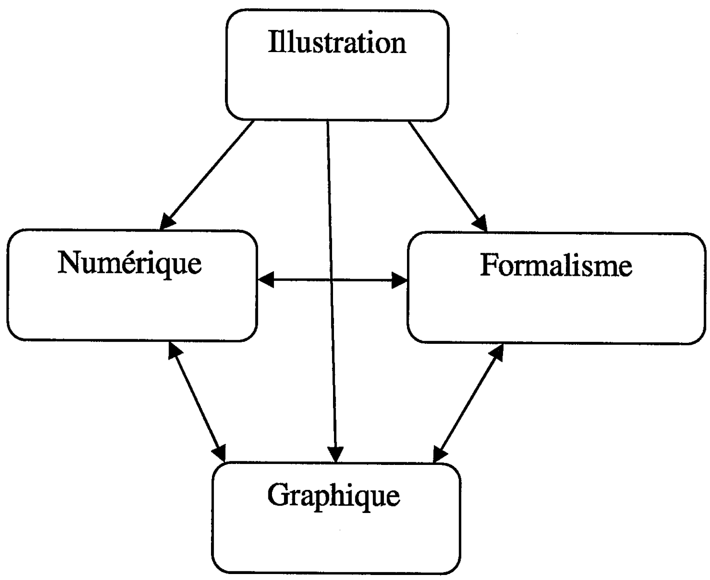
Enfin, le cas de la radioactivité est très surprenant si l'on se réfère aux résultats, dans les manuels de mathématiques, sur la place (nombre de situations données) des équations différentielles relativement à ce domaine. Ce domaine est pris comme exemple, avec la mécanique, de lieu de concrétisation de la continuité didactique. Aucun exercice n'est proposé à leur sujet en physique.

III.3. Les registres de représentation sémiotique

Il s'agit ici de reprendre l'analyse de l'introduction des équations différentielles présentée précédemment, en la complétant par un regard suivant les registres de représentation. À la suite de Duval, nous avons considéré, en effet, que la conjugaison d'une diversité de registres peut être un élément d'appui pour la conceptualisation des équations différentielles et pour la mise en œuvre de la continuité didactique.

III.3.1. Méthodologie

Nous avons présenté dans la première partie de ce chapitre les outils utilisés pour cette analyse, en particulier la mise en relation des différents registres, sous la forme d'un schéma conceptuel :



Nous avons donc :

1°) noté la présence des types de représentations (le mot type est ici utilisé pour indiquer qu'on ne préjuge pas que ces représentations sont utilisées comme registre c'est-à-dire comme base d'un traitement de l'information).

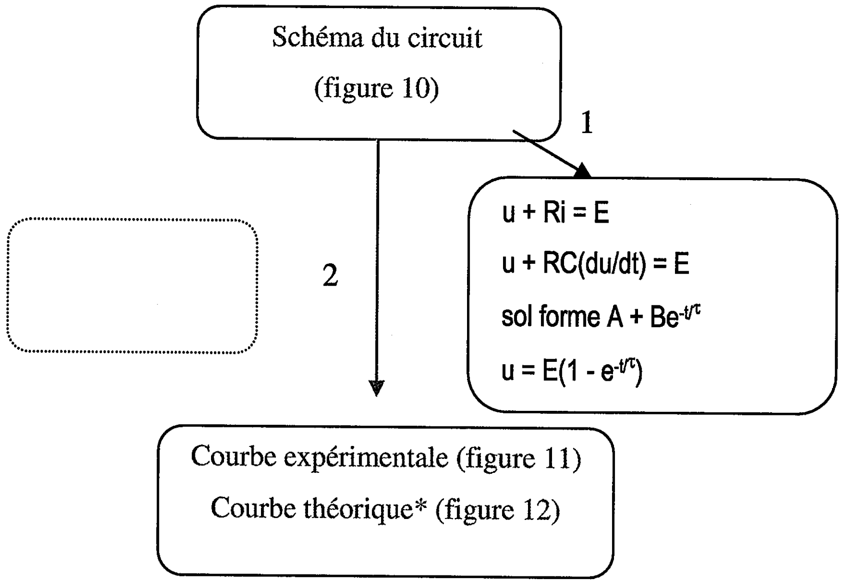
2°) relevé ceux qui interviennent comme registres, en précisant quel traitement y est fait (calcul dans un tableau pour le numérique, résolution d'une équation dans le registre formel, faire ou compléter un schéma dans le registre des "illustrations",etc.)

3°) relevé les mises en relation : lesquelles, et de quelle manière.

Cette analyse ne porte, pour les manuels de physique, que sur le chapitre spécifique correspondant à l'apparition première de l'équation différentielle du premier ordre (selon le programme) : réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension. Quatre ouvrages ont ainsi été analysés, d'une part du côté "cours" et d'autre part du côté des exercices, en relevant les exercices résolus donnés à titre d'exemples-types de traitement : Tomasino, Durandeau, Galiléo et Hélios

III.3.2. Collection Tomasino

a) Cours (p. 142-144)



Commentaires sur les flèches

Flèche 1 : la mise en relation entre le schéma du circuit électrique et l'équation différentielle associée, est entièrement implicite : il s'agit de voir à travers les notations que l'on suit bien le circuit RC (c'est dans la coutume.... didactique !)

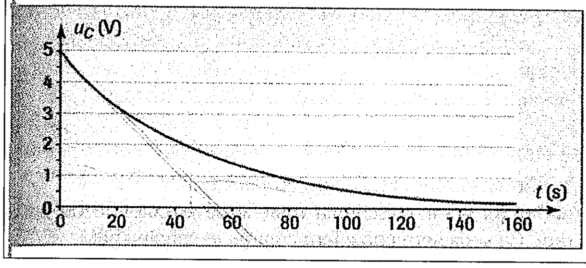
Flèche 2 → deux phrases très sobres "*on soumet.... RC... montage de la figure 10. La réponse du dipôle ... tracé informatique de la figure 11*".

Flèche 3 → Il y a ambiguïté car il est question dans la légende de "modélisation du relevé expérimental", ce qui désigne en principe l'ajustement automatique, par le logiciel, des valeurs des paramètres. L'ambiguïté est de mise, car dans le texte il est dit "en choisissant comme modèle l'expression de la relation établie théoriquement" (ce qui laisse entendre aussi bien la relation avec les paramètres R et C inconnu, que le fait qu'on ait remplacé R et C par leurs valeurs). Le problème est qu'il n'y a aucune valeur de R et C donnée dans le texte…

b) Exercice

ÉNONCÉ **Décharge d'un condensateur**

Un condensateur de capacité C, initialement chargé sous une tension $E = 5{,}0$ V, est déchargé à travers un conducteur ohmique de résistance $R = 10^2$ kΩ. On mesure la tension u_C aux bornes du condensateur au cours de la décharge et, d'après ces mesures, on obtient la courbe suivante :



1. En notant u_C la valeur instantanée de la tension aux bornes du condensateur, montrer que l'équation différentielle du circuit de décharge est de la forme :

$$u_C + RC\frac{du_C}{dt} = 0.$$

2. Vérifier que $u_C = U_m e^{-\frac{t}{RC}}$ est solution de l'équation précédente.

3. En déduire la valeur de U_m en admettant que la charge initiale du condensateur est maximale.

4. Déduire de la courbe la valeur de la constante de temps τ du dipôle RC étudié.

5. Quelle est l'expression de τ pour un tel circuit?

6. En déduire que la capacité du condensateur est voisine de $4{,}7 \times 10^2$ µF.

Cette situation fait intervenir, à la fois, plusieurs registres sémiotiques. En nous servant du schéma général présenté dans le chapitre 0 p.75, nous représentons ci-dessous les activités cognitives telles qu'elles apparaissent à travers la lecture des questions.

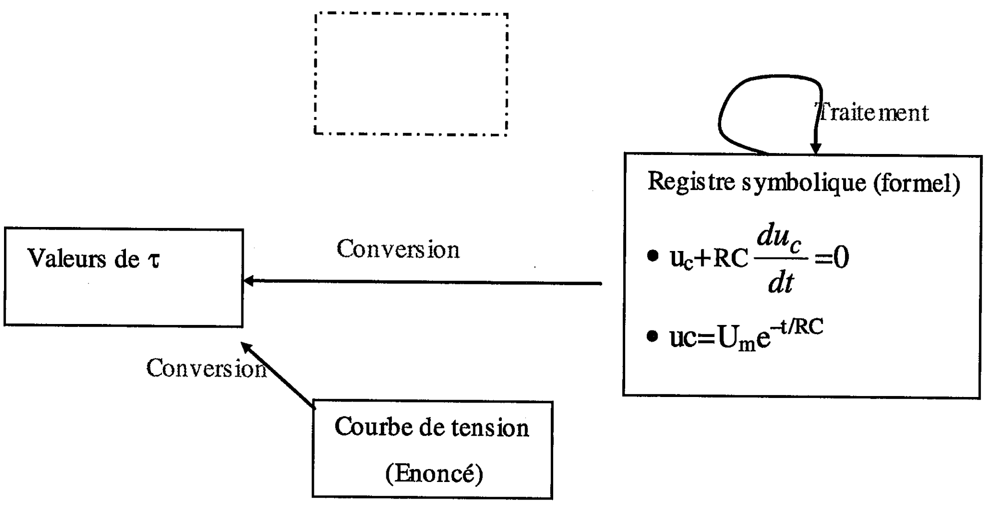


Schéma 1 : mise en relation des registres

L'énoncé présente brièvement les résultats d'une expérience déjà réalisée. Deux registres sémiotiques y sont utilisés : le registre de la langue naturelle (pour décrire la situation) et le registre graphique[47]. Le lien entre les deux registres est explicite et apparait au niveau de l'interprétation de l'allure de la courbe (courbe décroissante pour traduire la décharge du condensateur) et des valeurs initiale et maximale de la tension aux du générateur.

Pour la question 1, les notions théoriques vues en cours (loi d'additivité des tensions) doivent conduire sans difficulté à *la formation* de l'équation différentielle demandée (dans le registre symbolique).

La question 2 répond à une activité de *traitement* dans le registre symbolique (RS ➔ RS) : d'où la présence de la boucle dans le schéma 1. Un jeu de substitution, de la fonction u_c donnée dans l'équation différentielle, conduit à la réponse[48]. La question 3 permet de trouver la valeur de U_m et donc de trouver la solution particulière avec la condition initiale : à l'origine des temps, la tension est maximale. Ce sont des connaissances mathématiques qui sont mises en avant pour répondre à ces questions.

La question 4 relève d'une activité de conversion (RG ➔ RN). On doit se servir des informations du graphique (RG) pour déterminer une valeur numérique approximative (registre numérique) de la constante de temps. Il s'agit de tracer la tangente à la courbe des tensions en U=5,0 V et de lire le temps correspondant sur le graphique, c'est-à-dire la valeur numérique qui se trouve à l'intersection de cette tangente et l'axe des abscisses. Les connaissances mises en jeu relèvent essentiellement des mathématiques.

Les réponses aux questions 5 et 6 viennent d'un traitement de formules mathématiques.

Hormis la première question, où la formation de l'équation différentielle conduit à mettre en œuvre des connaissances de physique, le reste des questions (où des changements de registres sont observés), s'appuie sur une manipulation des formules mathématiques. Pour ce qui est de la courbe fournie avec l'énoncé, son statut "mathématique" est mis en avant. Une fois la valeur de la constante de temps obtenue, on aurait pu s'attendre à une interprétation "physique" (dans le sens RN ➔ RG), qui aurait été synonyme d'un retour au phénomène décrit. Dans ce cas d'interprétation, la courbe, bien que théorique, est vue, non pas comme la

---

[47] La courbe qui est donnée semble être une courbe théorique, donc non construite à partir de mesures.

[48] Nous reviendrons plus tard sur le problème que pose la formulation de cette question (voir 0

représentation d'une fonction mathématique, mais comme la représentation d'un phénomène physique : ici, l'évolution de la tension en fonction du temps.

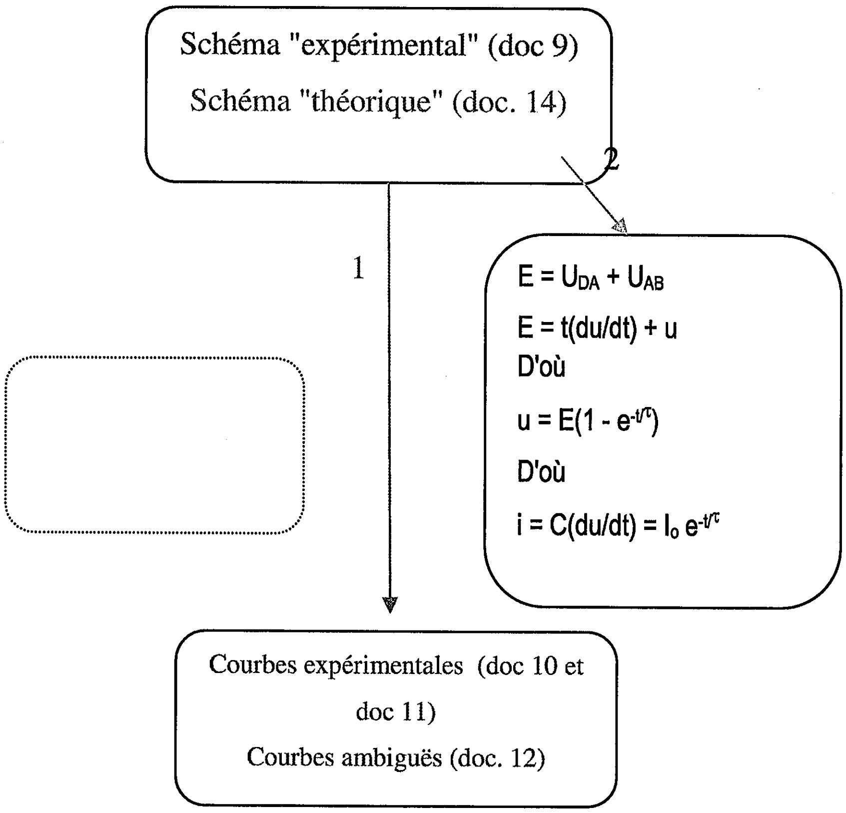
III.3.3. Collection Durandeau

Cours (p. 138 – 140)

Cette partie du cours étudie la charge d'un condensateur soumis à un échelon de tension. L'étude se fait suivant deux parties principales : étude expérimentale et étude théorique.

Dans la première partie, un schéma du circuit est donné pour venir en appui de l'activité proposée. Ensuite, deux courbes expérimentales, qui sont des copies d'écran, sont données en référence à l'activité. Ce sont des courbes qui représentent l'évolution de la tension en fonction du temps. Un commentaire porte sur chaque courbe, du type : *"la courbe représente..., la courbe montre que..."*, ou plus implicitement : *"la différence visualise la tension..." (doc. 11).*

Un autre jeu de courbes, censées illustrer l'effet du produit RC, est donné (doc. 12) : le texte y fait référence en appui d'un constat expérimental, mais les courbes sont visiblement théoriques. La mise en relation entre le schéma et les courbes est entièrement implicite.



Remarque : Nous constatons qu'il n'y a pas de confrontation – même qualitative – entre les mesures et le modèle.

On peut observer une diversité des registres mobilisés pour cette étude, dont les principaux sont : symbolique (expressions mathématiques), numérique, langue naturelle, graphique.

RG ➔ RLN :

Cette étude expérimentale permet de mettre en relation plusieurs registres : registre du langage naturel, registre des illustrations et registre graphique. Mais l'interprétation des courbes du document 10 **(RG)** conduit à un résultat expérimental donné dans le registre **(RLN)** :

« le condensateur d'un dipôle (R, C) ne se charge pas instantanément : la charge du condensateur est un phénomène transitoire ».

RG ➔ RS :

De même, l'interprétation des courbes **(RG)** du document 12 conduit à la *formation* (au sens de Duval) d'une unité cognitive significative. Il s'agit de la constante de temps τ, donnée dans le registre symbolique **(RS)** « $R.C = \tau$ ».

La partie "étude théorique" est celle qui conduit à la *formation* de l'équation différentielle. Un schéma simplifié du document 9 est proposé dans le document 13. Un sens d'orientation de la tension y est donné et partant, l'application de la loi d'additivité des tensions conduit à l'établissement de l'équation différentielle. On a ici un passage du registre **(RI)** (schéma) au registre symbolique **(RS)** : $E = u_{DA} + u_{AB}$. Cette formule conduit à l'établissement de l'équation différentielle $E = \tau \cdot \frac{du}{dt} + u$ puis, par *traitement*, à sa solution particulière

$$u = E(1 - e^{-t/\tau}).$$

Un autre jeu de registres (RS ➔ RG et inversement) permettent de donner une signification à la notion de constante de temps présentée dans la première partie.

Analyse de l'exercice résolu (p. 145)

CHARGE D'UN CONDENSATEUR

Un condensateur initialement déchargé, de capacité $C = 1{,}0\ \mu F$, est placé en série avec une résistance $R = 10\ k\Omega$. Il est chargé par un générateur de tension dont la force électromotrice est $E = 5{,}0\ V$.
À l'instant $t = 0$, on ferme le circuit schématisé ci-contre.

1. En appliquant les relations algébriques liant les grandeurs électriques, établir l'équation différentielle de charge du condensateur, c'est-à-dire la relation existant entre la tension instantanée u_{AB}, sa dérivée par rapport au temps et les caractéristiques des composants du circuit. Préciser les conventions et orientations choisies.

2. La solution de l'équation différentielle est de la forme :

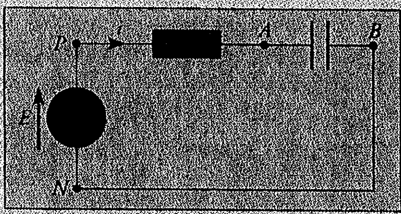
$$u_{AB}(t) = A\,[1 - \exp(-\alpha \cdot t)].$$

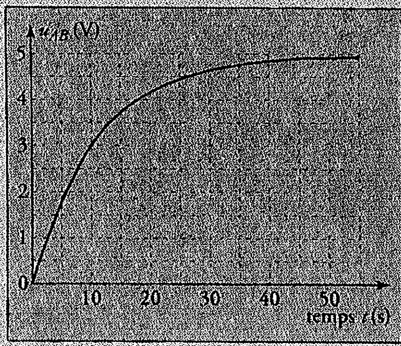
Déterminer A et α en fonction de E, R et C.

3. a. Définir la constante de temps (ou temps caractéristique) τ.
Exprimer τ en fonction des caractéristiques du circuit.

b. On définit la durée $t_{1/2}$ telle que $u(t_{1/2}) = \frac{E}{2}$. Montrer que $t_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$.

4. Déterminer la valeur numérique de τ à l'aide de la courbe représentant $u_{AB}(t)$. La valeur trouvée est-elle compatible avec les valeurs des caractéristiques des composants données au début de l'énoncé ?





Une description des éléments du circuit est donnée par un texte de l'énoncé **(RLN),** à côté duquel un schéma **(RI)** d'un circuit (R, C) et un graphique (**RG**) sont proposés. Des expressions mathématiques (**RS**) sont données ou à trouver, en guise de modélisation mathématique du phénomène. Une diversité de registres de représentation est convoquée.

La question 1 conduit à la formation de l'équation différentielle qui régit le phénomène étudié. Il est demandé d'appliquer des « relations algébriques » pour obtenir l'équation différentielle. En réalité, lesdites relations algébriques ne sont qu'une conséquence de l'application des lois de la physique (loi d'additivité des tensions). On peut se demander pourquoi le caractère mathématique de ces relations est mis en avant, et pourquoi on ne pas parle des règles (lois) de la physique et on laiss à la charge de l'élève ce travail de transition physique– mathématiques qui conduirait à l'établissement de l'équation différentielle « du physicien ».

Les conversions entre registres RI ➔ RS ou bien RLN ➔ RS, ou encore (RI ; RLN) ➔ RS ne semblent pas être mis en valeur de façon explicite.

En effet, pour l'établissement de l'équation différentielle **(RS),** la donnée d'un schéma dans l'exercice ne joue pas immédiatement un rôle, même si des précisions sur les conventions et les orientations sont demandées à la fin de la question 1. On peut aussi se demander si l'élève dispose des moyens pour valider sa réponse par rapport au schéma et à la courbe fournis.

La question 2 relève d'une activité de *traitement* dans le registre symbolique. Elle conduit à l'établissement d'une solution particulière de l'équation différentielle obtenue. Mais la correspondance entre la fonction obtenue et la courbe donnée est supposée. On peut penser que l'élève doit se servir de ses connaissances mathématiques pour juger de la validité de cette correspondance, c'est-à-dire du passage, qui est implicite ici, de la solution $u_{AB}(t)$ au graphique : (RS) ➔ (RG)).

En dehors de la question 3a qui fait appel à des notions de physique vues dans le cours, la suite de l'exercice relève d'une manipulation mathématique dans le registre symbolique (question 3b) ou d'une manipulation graphique nécessitant des connaissances mathématiques (tracé d'une tangente à une courbe en un point) pour obtenir une valeur numérique. En gros, la correspondance entre les registres graphique et numérique (RG ➔ RN) met en jeu essentiellement des connaissances mathématiques.

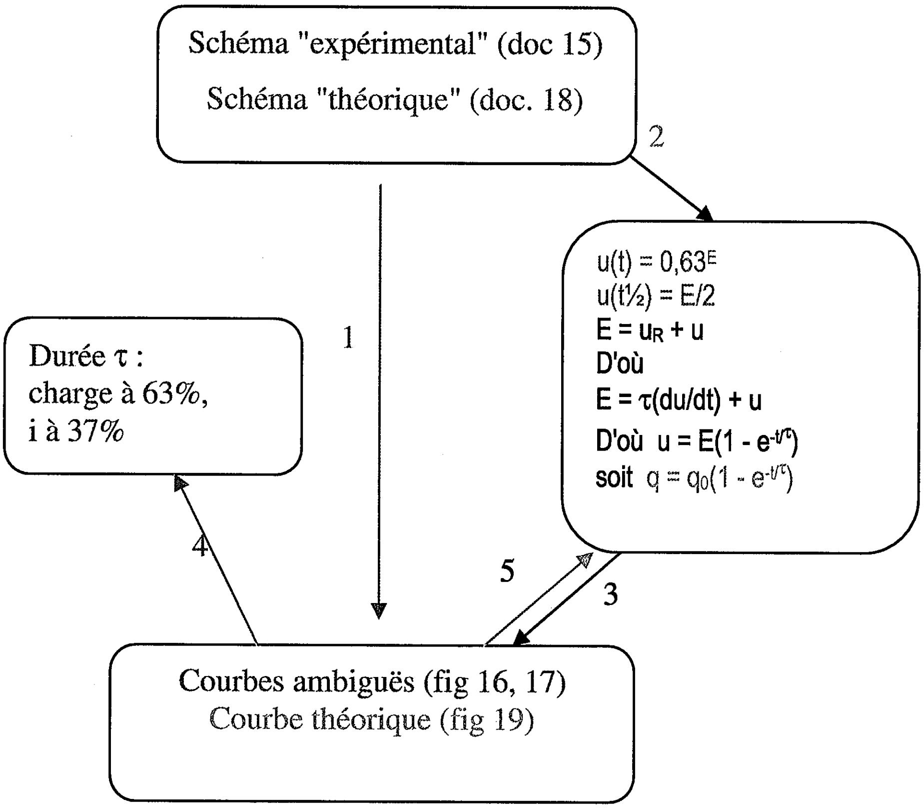
III.3.4. Collection Galileo

Cours (p. 132 – 134)

L'analyse de cette partie est très proche de celle présentée dans 0a).

Remarque : il y a un long paragraphe conséquent sur l'interprétation qualitative de la forme des courbes (en particulier, le fait que i diminue car Ri diminue car Uc augmente). Mais, hélas, i est calculé par dérivation numérique !

- **Collection Helios**
  - **Cours (p. 117 – 118)**



Flèche 1 → les courbes "ambiguës" sont complétées par des copies d'écran de logiciel d'acquisition données… avant : il est dit dans le texte : "*l'expérience de l'activité 3 (voir p. 112) montre que les tensions Uc et Ur évoluent au cours du temps selon une allure exponentielle*".

Mais… il n'y a qu'une seule courbe page 112…

Flèche 4 → une phrase dit qu'à la date τ le condensateur est chargé à 63% en faisant référence à la courbe par "(doc.16)" mis en fin de phrase. Cette référence ne dit en fait rien puisque, outre le fait que la courbe n'a pas l'air vraiment expérimental, il est impossible d'estimer les 63 % !

Flèche 3 → en fait le lien vers la courbe théorique est quasiment absent. Cette dernière ne concerne que $q(t)$ et est seulement évoquée par : "*ces équations horaires vérifient bien les conditions extrémales (voir doc 16 et 19).*"

Flèche 2 → il est juste marqué "(doc 18)" dans la phrase introductive.

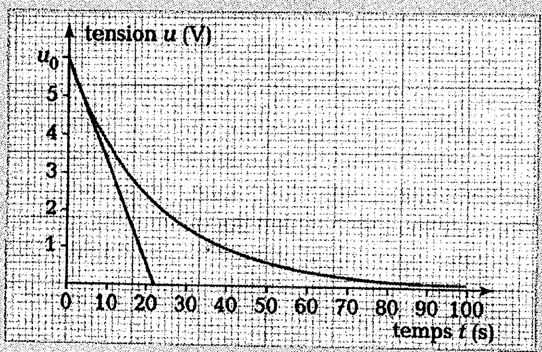
- **Exercice corrigé "apprendre à résoudre" (p. 121)**

Étude de la décharge d'un condensateur

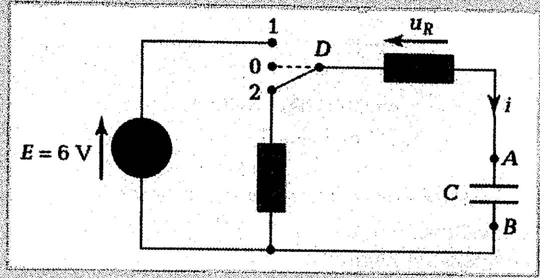
Le montage ci-contre permet d'étudier l'évolution de la tension $u = u_{AB}$ aux bornes d'un condensateur de capacité C monté en série avec deux résistances R. Initialement, le commutateur est depuis longtemps en position 2 et le condensateur est déchargé.

1 Indiquer comment on doit brancher l'interface (reliée à un ordinateur) ou l'oscilloscope pour enregistrer la tension u.

2 Comment faut-il manipuler alors le commutateur pour obtenir la courbe suivante représentant l'évolution de la tension u aux bornes du condensateur en fonction du temps t?



3 a. En respectant les conventions d'orientation du montage, préciser le signe de l'intensité i du courant lors de la décharge et le sens réel du courant.



b. Établir que l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C est de la forme :

$$u + \tau . \frac{du}{dt} = 0.$$

Exprimer la constante de temps τ en fonction des éléments du circuit.

4 a. Déterminer graphiquement la constante de temps τ du circuit.

b. En déduire la valeur expérimentale de la capacité C du condensateur sachant que $R = 5,0$ k Ω.

Conseils

- Bien positionner la masse.
- Attention aux erreurs de signe lorsqu'on applique la loi d'OHM.
- Utiliser la tangente à la courbe, déjà tracée, pour déterminer τ.

Trois registres sémiotiques sont convoqués pour le traitement des équations différentielles : registre des illustrations (schéma), registre graphique (courbe) et registre symbolique.

Le schéma (RI) accompagne le texte de l'énoncé. À la question 2, un lien explicite entre le schéma et la courbe théorique donnée (RG) est demandé. La mise en correspondance entre ces deux registres (RI → RG) est justifiée par des connaissances théoriques de la physique (modèle physique), du point de vue de l'allure de la courbe mise en relation avec le régime du condensateur (décharge), mais aussi mathématiques, du point de vue de sa construction qui doit supposer, au départ, une fonction.

La question 3.a conduit à la formation d'une équation différentielle. On doit se servir des conventions d'orientation du montage et appliquer la règle d'additivité des tensions ; ce n'est pas là tout à fait un changement de registre.

Pour la question 4.a, la tangente déjà tracée dans le graphique (RG) de l'énoncé permet de lire, sur l'axe des abscisses, la valeur numérique (RN) de la constante de temps. Le passage RG ➔ RN s'appuie sur des connaissances mathématiques (implicites) relatives à la sous-tangente.

On peut remarquer que, en dehors des deux premières questions où les connaissances de physique sont explicitement convoquées, l'articulation des registres dans le reste de l'exercice s'appuie sur le seul cadre des mathématiques. Le graphique fourni garde un statut « d'objet mathématique » : on y trace des tangentes et on lit des valeurs numériques (tâches mathématiques). Mais, au final, il n'y a pas de retour à la situation étudiée. On peut donc regretter l'absence d'une tâche de transition (d'interprétation) qui permettrait, par exemple, de revenir à une explication du régime (évolution du phénomène) à partir de l'expression du temps caractéristique (RS) ou de sa valeur numérique (RN), obtenue, par une mise en correspondance avec le graphique (RG) ou l'équation différentielle (RS).

III.3.5. Bilan

a) Partie cours

Dans la partie "cours" des manuels de physique, la détermination de l'équation différentielle (du premier ordre) et de l'expression des solutions de cette équation conduit à recourir souvent à plusieurs registres sémiotiques : illustration (RI) (souvent le schéma représentant l'évolution du phénomène), symbolique (RS) (équation différentielle et sa solution), graphique (RG) (courbe de la fonction solution), numérique (RN) (valeurs numériques de la grandeur ou de la constante de temps).

La mise en relation entre le schéma (qui représente le circuit), souvent donné, et l'équation différentielle se fait très vite, par application de la loi d'addition des tensions.

Nous avons signalé l'ambiguïté liée à la donnée des courbes qui sont censées être des représentations de données expérimentales numériques. Dans certains ouvrages, les courbes dites expérimentales sont tracées de la même manière que les courbes théoriques (graphe traditionnel, courbe parfaitement lisse). Ceci est bien évidemment tout à fait dommageable à la confrontation modèle – mesures. Il est alors frappant de remarquer que la confrontation entre le modèle (symbolique) et les tracés expérimentaux est généralement absente[49] : les courbes expérimentales se trouvent au début de la présentation, sont rarement commentées, puis on passe à la modélisation formelle qui débouche sur une courbe théorique. Tout se passe comme si la finalité était l'obtention de la relation physico-mathématique $u = E(1 - e^{-t/\tau})$! Les compléments et commentaires concernent ensuite la fameuse "constante de temps" et son avatar : le temps de demi-charge.

Par ailleurs, la caractérisation de la constante de temps permet de mettre en œuvre à la fois les registres RS, RG et RN. C'est un résultat important car la lecture graphique de la courbe (RG), censée représenter la solution de l'équation différentielle (RS), donne lieu à la détermination de la valeur numérique de la constante de temps. Ainsi, le phénomène étudié peut être interprété en termes de régime : transitoire ou permanent.

b) Partie exercices

Du côté des exercices, l'essentiel de l'information et de son traitement se situe dans le registre formel : établissement d'une équation, vérification de la solution, identification de paramètres, etc. Pour ce qui concerne le lien avec le registre des "illustrations", lorsqu'il est présent, on constate qu'il est celui de l'établissement de représentations algébriques (symboliques) reposant sur le décodage et la prise en compte des informations données dans un autre registre formel. Il y a donc très peu de traitement dans le registre des illustrations, qui est bien celui des "données" du problème, mais aussi très peu de traitement dans le registre des représentations graphiques. Les activités se limitent la plupart du temps à la lecture d'une valeur particulière sur un graphique qui est donné (valeur qui est en général celle de la constante de temps), graphique soi-disant "expérimental" comportant parfois déjà ladite tangente. On pourrait pourtant imaginer une activité mettant en jeu d'autres tangentes que celle à l'origine, un travail sur le tracé de la courbe traduisant la diminution de la tension qui

---

49 Et si présente, parfois sujette à caution...

sépare celle du condensateur à une date donnée de sa valeur limite (c'est évidemment celle de la tension aux bornes de la résistance), la superposition des courbes U_C et U_R, notamment.

On remarquera que la mise en relation entre le registre symbolique et le registre graphique (des courbes) n'est pas toujours mise en avant. Quelques ouvrages proposent cependant de tracer l'allure de la courbe : celle de $i(t)$ (Belin) ou celle de $u(t)$, à tracer à partir de l'asymptote et de la tangente à l'origine (Bordas).

Par ailleurs, il y a très peu de traitement proprement dit dans le registre numérique : nous avons fait figurer les questions relatives aux valeurs numériques, mais ceci est l'aboutissement des calculs et de la lecture du graphique.

III.4. Analyse praxéologique des exercices

III.4.1. Méthodologie

L'analyse présentée dans cette partie doit conduire à caractériser le type d'organisation praxéologique existant dans les manuels de physique, afin de rendre compte de la manière dont la continuité didactique mathématiques-physique y apparaît. Cette analyse doit permettre d'établir une relation (similarité, différence ...) entre la praxéologie "physique" et la praxéologie "mathématique" étudiée plus haut sur les tâches de même type.

Remarque:

a) Cas de la radioactivité

Pour ce qui est de l'organisation praxéologique dans les manuels de physique, nous avons pu constater qu'il y a très peu de tâches associant l'étude de la radioactivité et l'équation différentielle du premier ordre de type $y' = ay + b$. Comme nous l'avons mentionné plus haut, le manuel Microméga 2002 est le seul ouvrage, parmi les huit analysés, où le concept d'équation différentielle apparait lors de l'étude de la radioactivité. D'ailleurs nous n'y avons trouvé aucun type de tâche sur les équations différentielles hormis l'exercice 24 p. 105 question 3, où il est demandé de:

3. Ecrire, sous forme différentielle, la loi de décroissance radioactive d'une population de noyaux radioactifs.

On s'attend ici à ce que soit rappelée la formule $\frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t) = 0$, qui permet, par la suite, de trouver la relation entre le nombre de noyaux N(t) encore présents en fonction du nombre de noyaux N_0 présents à l'instant t = 0, c'est –à– dire $N(t) = Ne^{-\lambda t}$.

Cependant, l'essentiel des tâches concerne d'autres notions connexes comme la demi-vie, la constante radioactive, constante de temps ou l'activité. Dans cette partie, aucune analyse n'a été donc portée sur la radioactivité.

b) Autres types de tâches

Nous rappelons qu'hormis les types de tâches emblématiques que nous avons repértoriés (types de tâches relatifs à l'établissement et à la résolution d'équations différentielles), il existe d'autres types de tâches connexes, comme ceux associés à la détermination de la constante de temps.

La définition de la constante de temps τ (encore appelée temps caractéristiques) est d'une grande importance pour la loi modélisée par une fonction exponentielle (croissance ou décroissance), comme dans le cas de la désintégration radioactive ou du traitement d'autres modèles électriques (charge et décharge du condensateur) ou mécaniques (chute d'un corps avec frottement), etc. Elle permet, par exemple, de dire au bout de combien de temps, (temps exprimé en fonction de la constante de temps ou d'une autre constante, dans ce cas : la constante radioactive), on peut considérer que le nombre de noyaux a diminué de 99 %, ou bien dans combien de temps la condensateur est considéré comme chargé.

L'importance accordée à la constante de temps dans cette partie de l'étude des équations différentielles du premier ordre nous conduit à nous intéresser à l'organisation praxéologique autour de cette notion connexe.

Dans les manuels, nous avons remarqué deux types de tâches ; une première de nature algebrique et une deuxième, graphique.

Type de tâche 1 (algébrique)

Ce type de tâche est donné essentiellement sous deux formulations:

- *Donner l'expression de la constante de temps*
- *Déterminer/trouver/calculer la constante de temps*

Type de tâche 2 (graphique):

Utiliser le graphique pour déterminer la constante de temps.

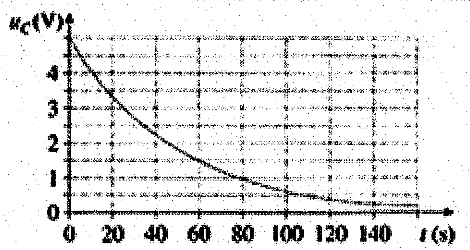
En se reférant à notre analyse des organisations mathématiques, on peut se rendre compte que ce type de tâches est absent dans les manuels de mathématiques.

III.4.2. Etude de quelques exercices d'électricité[50]

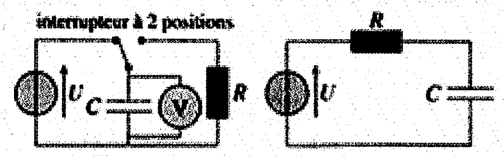
a) Collection Microméga 2002 p. 148, ex. 14

- **Énoncé**

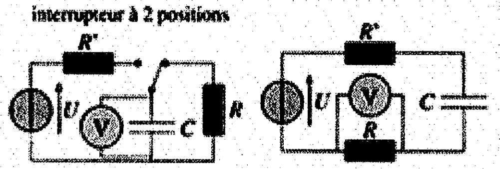
● 14. Un condensateur de capacité C, initialement chargé sous une tension $U = 5{,}0$ V, est déchargé à travers un conducteur ohmique de résistance $R = 100$ kΩ. On mesure la tension u_C aux bornes du condensateur au cours de la décharge et, d'après ces mesures, on obtient la courbe ci-dessous.



a. Quels sont les deux montages, parmi ceux représentés ci-dessous, qui permettent de réaliser la charge et la décharge du condensateur ?



1er montage 2e montage



3e montage 4e montage

Pour lequel de ces deux montages la charge est-elle la plus rapide ? Justifier la réponse.

b. En notant u_C la valeur instantanée de la tension aux bornes du condensateur, montrer que l'équation différentielle du circuit de décharge est de la forme :

$$u_C + RC\frac{du_C}{dt} = 0$$

c. Vérifier que $u_C = U_m\, e^{-\frac{t}{RC}}$ est solution de l'équation précédente.

Déduire du graphe $u_C(t)$ la valeur de U_m en admettant que la charge initiale du condensateur est maximale.

d. Déduire de la courbe la valeur de la constante de temps τ du circuit.

e. Quelle est l'expression de τ pour un tel circuit ?

En déduire que la capacité du condensateur est voisine de 480 µF.

50 D'autres exemples, ainsi que le tableau récapitulatif, figurent en annexe.

- **Analyse**

- *Questions b :*

La tâche « ...montrer que l'équation différentielle... est de la forme... » est du type (T1).

La technique consiste à écrire la loi des tensions et appliquer les relations entre i, q et C. C'est une technique qui relève des pratiques du physicien.

La technologie associée est elle aussi interne à la physique, légitimée par les lois de l'électrocinétique. Il s'agit de considérer, dans un circuit, que les grandeurs physiques i, q, u et leur taux de variation sont interdépendantes ce qui se traduit par une équation différentielle. Ce point de vue systémique est celui du spécialiste. Il n'est donc pas certain que les élèves passent par ce niveau. Les élèves mettent généralement en œuvre un raisonnement de type "séquentiel" (Viennot 96). Ils passent de connaissances du champ théorique à une technique d'application. C'est sans doute ce "court-circuit" qui pose problème, dès lors que l'exercice n'est pas une application directe du cours ou la reproduction d'un exercice standard.

- *Question c :*

Le type de tâche « vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle » est du type (T3). La technique attendue consiste à vérifier, en calculant d'une part la dérivée u' et d'autre part l'expression du second membre, et en montrant qu'elles sont identiques pour tout t. On peut signaler que l'accomplissement de cette tâche conduit à recourir à une tâche de transition physique-mathématiques PM : il faut « oublier » l'origine physique des coefficients et appliquer la formule $(Ke^{\alpha t})' = \alpha Ke^{\alpha t}$. Pour un « expert » (le professeur de maths ou de physique) cette tâche passe complètement inaperçue, alors qu'elle crée des difficultés chez certains élèves qui, dès qu'ils sont en physique, « oublient » ce qu'ils connaissent en mathématiques. Les éléments technologico-théoriques associés trouvent leur légitimité dans divers domaines des mathématiques (algèbre/ Analyse).

Mais une question d'ordre théorique se profile.

D'après le cours de physique, mais aussi d'après leurs connaissances mathématiques, les élèves sont en mesure d'établir eux-mêmes la forme des solutions. Pourquoi alors la fournir ?

La réponse vient d'une mise en application du programme de physique, qui stipule que l'établissement de la forme de la solution n'est pas demandé aux élèves :

> "... ce qui est appelé "résolution analytique" dans la colonne des compétences exigibles comprend : l'établissement de l'équation différentielle, la vérification qu'une solution analytique proposée la satisfait, et la détermination des constantes à partir des paramètres du circuit et des conditions initiales".
> Extrait de programme de physique 2001 (B.0 HS n° 4 2001)

Il y a donc un problème théorique, si on ignore la forme générale des solutions ; puisque U_m n'est pas encore déterminé, ce qui se fait est alors une vérification d'une solution générale et non particulière. Déjà, le texte ne dit rien sur l'unicité de la solution. Mais ce n'est pas parce qu'on en a trouvé une que c'est la bonne. En fait, pour pouvoir conclure il faut savoir que la solution générale est de la forme $Ke^{-t/RC}$, et il s'agit alors de vérifier que la valeur $K = U_m$ convient. Le calcul de U_m n'intervient que dans la question suivante. La question mérite donc d'être reformulée. Voici une formulation possible :

- « vérifier que les fonctions de type $Ke^{-t/RC}$, où K est un réel non nul, sont solutions de l'équation différentielle $u_c + RC\frac{du_c}{dt} = 0$ »

La forme générale des solutions de l'équation différentielle étant connue, on peut ensuite vérifier que lorsque $K = U_m$ on trouve une solution particulière, c'est-à-dire qui traduit l'évolution du phénomène étudié dans ce cas précis.

Autre formulation :

[Etant donné Um], vérifier que la fonction $u_c = U_m e^{-t/RC}$ est la solution de l'équation différentielle $u_c + RC\frac{du_c}{dt} = 0$ quand on suppose que la charge initiale du condensateur est maximale ».

L'organisation praxéologique qui en découle s'appuie sur le théorème suivant :

« Toute fonction de la forme X est solution de l'équation différentielle Y »

La vérification conduit à :

1) exécuter la tâche de transition PM :

Passer de : X (du physicien) à X (du mathématicien)

Y (du physicien) à Y (du mathématicien)

2) une manipulation mathématique (substitution puis comparaisons) entre X (du mathématicien) et Y (du mathématicien). Ici on fait abstraction du sens physique des coefficients.

3) une interprétation physique du résultat mathématique

Finalement, cette praxéologie (mixte) peut s'expliquer par le schéma suivant :

Entrée : type de tâche physique

↓ *Tâches de transition*

Traitement : technique/technologie mathématique (parfois physique aussi)

↓ *Tâches de transition*

Sortie : interprétation physique

Dans cet exercice, les tâches de transition sont implicites. Ce qui risque de se produire chez l'élève c'est de passer directement à l'étape 2, « Traitement », et de continuer à raisonner dans le seul cadre de rationalité des mathématiques. C'est cette réduction que l'on peut percevoir lorsqu'il s'agit d'une situation d'habillage.

- *Question* d : constante du temps (τ)

Ce type de tâche proposé à la question d) concerne la détermination graphique de la constante de temps du circuit. Il s'agit de construire la tangente à la courbe de décharge (donnée) au point de coordonnées (0 ; U_m). Cette tangente coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est le temps caractéristique (technique mathématique).

Cette pratique est légitimée par le fait que le coefficient directeur de cette tangente est la valeur de la dérivée première de la fonction t $\mapsto u_c(t)$ (u_c étant la tension au borne du condensateur) à l'instant t = 0 : $du_c/dt = - U/\tau$. Autrement dit, ce rapport est l'expression de la tangente de l'angle formé par l'axe des abscisses et la tangente. U est la longueur du côté opposé à l'angle, il en résulte que τ est la distance entre l'origine du repère et le point d'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses.

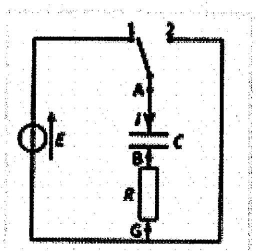
Ainsi, la technique associée à ce type de tâche est mathématique, de même que la ou les technologie(s) et la théorie associées.

b) Belin

- **Énoncé**

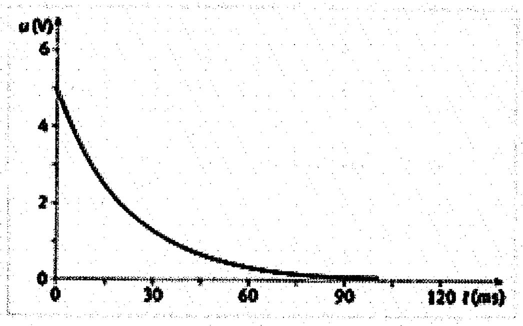
25 Étude de la décharge d'un condensateur

(D'après National juin 2001, 5 points.)



Le montage ci-contre permet d'étudier l'évolution de la tension u_{AB} aux bornes d'un condensateur de capacité C, en série avec une résistance R. Une interface, reliée à un ordinateur, permet l'acquisition de la tension u_{AB} au cours du temps. Initialement, l'interrupteur K est en position 1 depuis longtemps.

1. À $t = 0$, quel est l'état de la charge du condensateur?
2. Représenter la flèche tension u_{AB}.
3. À quoi correspond la courbe ci-dessous?



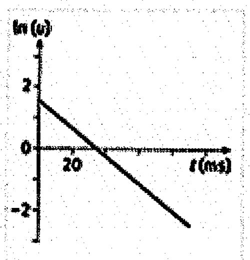
4. Quelle est la manipulation à effectuer sur le circuit pour obtenir cette courbe?
5. En déduire une justification à la réponse faite en 2.
6. En respectant l'orientation choisie, préciser le signe de l'intensité i du courant lors de la décharge du condensateur.
7. Écrire la relation entre:
   - l'intensité i du courant et la tension u_{BG};
   - la charge q_A du condensateur et la tension u_{AB};
   - l'intensité i et la charge q_A;
   - les tensions u_{BG} et u_{AB} lors de la décharge.
8. En appliquant la loi d'additivité des tensions, montrer que l'équation différentielle vérifiée par la tension u_{AB} est de la forme:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{du_{AB}}{dt} + u_{AB} = 0$$

avec α une constante que l'on exprimera en fonction des caractéristiques des différents dipôles du circuit de décharge.

9. Montrer que le rapport $\frac{1}{\alpha}$ est homogène à un temps. Quel nom lui donne-t-on?
10. Proposer une solution de l'équation différentielle.
11. En déduire l'expression du logarithme népérien de la solution proposée.

(Rappels mathématiques: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln(a^x) = x \ln a$; $\ln e = 1$)



12. Le logiciel utilisé a permis de tracer la courbe correspondant à la fonction $\ln(u_{AB}) = f(t)$ et de déterminer l'expression de la fonction:

$$\ln(u) = -45{,}5t + 1{,}61.$$

Montrer que l'allure de cette courbe est en accord avec l'expression obtenue pour la solution de l'équation différentielle.

13. Avec laquelle des trois valeurs proposées pour la constante de temps τ, les résultats de la modélisation sont-ils en accord: $\tau = 0{,}46$ ms; $\tau = 2{,}2$ ms; $\tau = 22$ ms?

Les sept premières questions concernent des tâches essentiellement intra-physiques, même si certaines questions nous paraissent intéressantes, mais pour une analyse en termes de changement de registre sémiotique. Nous ne nous sommes intéressés qu'aux types de tâches proposés à partir de la question 8.

- **Analyse**

- *Question 8*

Le type de tâche « ...montrer que l'équation différentielle... est de la forme... » est de type (T1), et dont la technique pour l'accomplir est indiquée dans l'énoncé. Il s'agit d'écrire la loi des tensions et appliquer les relations entre i, q et C (technique du physicien) ; l'équation différentielle obtenue est celle du physicien. Les éléments technologico-théoriques sont aussi physiques, c'est-à-dire ceux que nous avons indiqués dans l'analyse de l'exercice précédent (Micromega 2002 question b).

- *Question 10*

La tâche « proposer une solution de l'équation différentielle » est de type (T2).

Mais, si la question est prise au pied de la lettre, l'accomplissement de ce type de tâche conduit à donner *une* solution, donc une forme générique; la technique peut alors simplement consister en la réécriture de l'équation sous la forme $\frac{du}{dt} + \alpha u = 0$ et à dire que la solution est de la forme $u(t) = Ae^{-\alpha t}$

Si la question doit être comprise comme donner *la* solution compte tenu des conditions expérimentales, alors l'étape précédente doit être suivie de la détermination de la constante A. Dans les deux cas, la technique est mathématique.

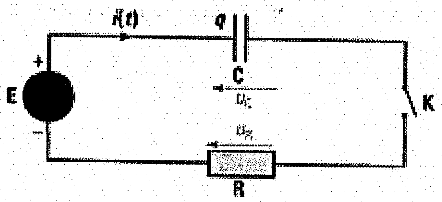
Quant à la technologie, elle relève essentiellement des mathématiques et s'appuie sur les éléments d'analyse concernant l'exponentielle : la fonction dont la dérivée est égale à la fonction elle-même (à une constante multiplicative près) est une fonction exponentielle.

On remarque au passage que le lien avec la physique se fait au moment de la détermination de la constante, où on "invoque" traditionnellement les fameuses "conditions initiales", mais que l'existence d'un ensemble de solution ne semble pas concerner le physicien. Pourtant, c'est bien là quelque chose de remarquable et de parfaitement expérimental : quelle que soit la tension du générateur, quelle que soit la charge initiale du condensateur, l'évolution de la charge est du même type.

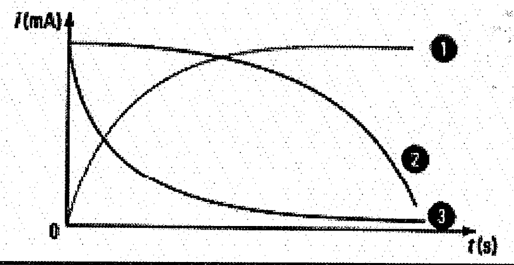
La question 11 prépare à l'utilisation d'une méthode graphique (mathématique) qui n'apparaît pas dans les manuels de mathématiques. Il s'agit de transformer l'expression de $u(t) = Ae^{-\alpha t}$ en appliquant le logarithme népérien à ses deux membres. La nouvelle expression obtenue, de la forme : ln (u(t)) = - at + b (où a et b sont des nombres réels non nuls), représente l'équation d'une droite affine dont le coefficient directeur est l'inverse de la constante du temps de la décharge.

c) Bréal

26 **Dans le circuit schématisé ci-dessous, on note, à un instant t quelconque, $q(t)$ la charge de l'armature du condensateur et $i(t)$ l'intensité du courant. On ferme l'interrupteur K à $t = 0$.



1. Que se passe-t-il pour le condensateur ?
2. Lorsque le condensateur est totalement chargé, donner les expressions de u_C, Q et E_{red}.
3. Donner l'expression de la tension $u_C(t)$ en fonction de C et $q(t)$, puis celle de la tension $u_R(t)$ en fonction de R et $q(t)$.
4. En utilisant la loi d'additivité des tensions, établir l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$.
5. Cette équation différentielle admet une solution du type $q(t) = A\,e^{-kt} + B$. Exprimer B et k en fonction de R, C et Q.
6. À partir de la condition initiale, déterminer l'expression de A. En déduire celle de $q(t)$ en fonction de Q et $\tau = RC$.
7. Montrer alors que l'intensité peut s'écrire : $i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$.
8. Quelle courbe représente l'allure de $i(t)$? Justifier.



- **Énoncé**

- **Analyse**

- *Question* 4

La tâche proposée à la question 4 « en utilisant l'additivité des tensions... établir l'équation différentielle vérifiée par ... » est de type (T3). La technique n'est pas différente de celle que nous avons présentée plus haut à plusieurs occasions : appliquer la loi des mailles, reporter les expressions caractéristiques des dipôles données à la question précédente et tenir compte de la relation différentielle entre i et q.

Un des éléments technologiques, qui est un résultat de l'électrocinétique, est le fait que l'intensité est le débit de charge

- *Question 5*

La question 5, « exprimer les paramètres en fonction des grandeurs physiques », peut être considérée comme un type de tâche relevant exclusivement des mathématiques. La technique consiste à reporter l'expression générale fournie dans l'équation différentielle (donc à exprimer la dérivée) et à en déduire la valeur de k et B. Il faut tenir compte des conditions initiales pour déterminer A. Une autre technique consiste à résoudre « mathématiquement » l'équation différentielle de type $y' = ay + b$ puis à obtenir, par comparaison, les expressions de A, B et k.

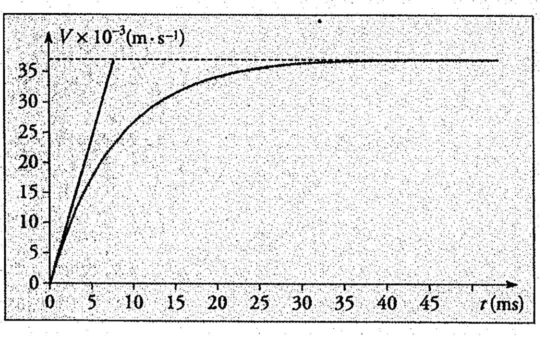
Ainsi, tout comme la technique, les éléments technologico-théoriques associées relèvent des mathématiques. On s'appuie sur le fait qu'une équation différentielle du premier ordre possède un ensemble de solution (un paramètre libre) ; l'équation avec second membre constant admet une solution particulière qui est une constante.

III.4.3. Etude d'un exercice de mécanique

Dans les manuels choisis pour notre analyse, nous n'avons pas relevé de nouveaux types de tâches en dehors de ceux que nous avons regroupé plus haut en quatre catégories, si ce n'est celui associé à l'étude de la chute d'un corps avec frottement : « rechercher un modèle (ou une modélisation) adéquate ».

12. CHUTE D'UNE BILLE DE VERRE

Le graphique ci-dessous représente l'évolution au cours du temps de la vitesse d'une bille en verre de rayon $r = 4{,}6$ mm, de masse $m = 1{,}0$ g tombant dans du glycérol.



1. À partir du graphique, déterminer :
a. la constante de temps de la vitesse ;
b. la durée $t_{1/2}$;
c. la valeur de la vitesse limite.
2. On fait l'hypothèse que la valeur de la force de résistance du fluide obéit à la loi de Stockes :
$$f_R = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot V.$$
a. Établir l'équation différentielle du mouvement.
b. Montrer l'existence d'une vitesse limite. La calculer à partir des données.
c. Montrer que l'expression de la vitesse sous la forme : $V(t) = C(1 - e^{-t/\tau})$ est solution de l'équation à condition d'identifier les paramètres C et τ.
d. Donner la signification de τ et calculer sa valeur.

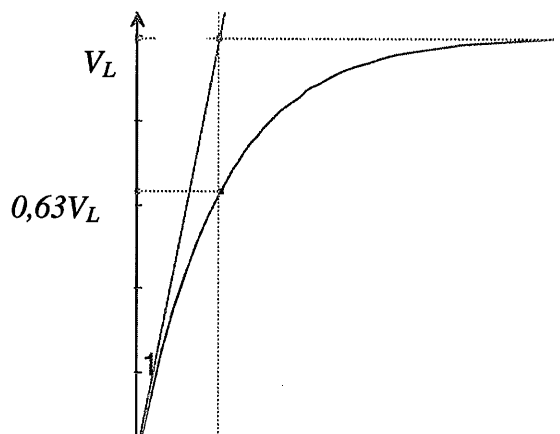
Données : masses volumiques (en g · cm^{-3}) :
verre : 2,45 ; glycérol : 1,26.
Viscosité du glycérol : 1,49 Pa.s.

Manuel Collection Durandeau. Ex. 12 p. 233

Dans cet exercice, on demande dans les trois premières questions la détermination, à partir du graphique proposé, des grandeurs physiques : constante de temps, durée $t_{1/2}$ et vitesse limite.

Pour la question 1 a), une technique mathématique est attendue. Elle consiste à tracer la parallèle à l'axe des vitesses passant par le point d'intersection de la tangente à la courbe en 0 avec l'asymptote (la droite en pointillé). La constante de temps (τ) est le point d'intersection de cette parallèle avec l'axe des temps. La technologie relève à la fois des mathématiques et de la physique.

- mathématique : en considérant que la courbe proposée est celle d'un corps en mouvement régit par une équation différentielle. À chaque instant, la vitesse de ce corps est donnée par une expression de type $V(t) = A(1-e^{-t/\tau})$. A étant la valeur limite de V(t), la tangente à la courbe de V en 0 a pour coefficient directeur le rapport entre la vitesse limite et la constante de temps. C'est aussi la tangente de l'angle formé par l'axe des temps et la tangente.
- physique : on sait que la constante de temps est la durée au bout de laquelle la grandeur considérée (ici la vitesse) atteint 63% de sa valeur maximale (vitesse limite V_L). On peut, à l'aide d'une règle graduée, placée sur l'axe des vitesses 0,63 V_L.



Cette technologie (physique) permet de considérer une autre *technique* (de la physique) : placer 0,63 de V_L sur l'axe des V. Par projection, on obtient la constante τ sur l'axe des temps (t). Les éléments technologiques sont constitués de notions des mathématiques (projection) et de physique (théorie de la physique qui permettent de définir la constante de temps)

La question 1.c) demande la détermination de la vitesse limite. C'est la valeur maximale de la vitesse que l'on peut obtenir directement sur le graphique. Il s'agit de l'ordonnée obtenue par l'intersection de l'asymptote verticale avec l'axe des ordonnées. Là aussi, les éléments technologiques relèvent à la fois des mathématiques et de la physique. En effet, pour ce qui est de la physique, connaissant la constante de temps, on peut par report de mesure repérer la valeur 5τ. On sait qu'au bout de 5τ, le mouvement (vitesse) atteint quasiment le régime asymptotique ou permanent. Le point de la courbe d'abscisse 5τ a pour ordonnée une valeur approchée de la vitesse limite.

La question 2.a) relève des tâches de type (T1). La technique n'est pas indiquée, mais elle consiste à appliquer la deuxième loi de Newton à la bille dans son mouvement dans le référentiel terrestre. Les éléments technologiques relèvent de la mécanique classique.

La question 2.b) demande la détermination de la valeur de la vitesse limite. La technique envisageable (ou attendue) consiste à considérer que l'accélération est nulle : $dV/dt = 0$.

En effet, cela vient (technologie) du fait que, quand la vitesse limite est théoriquement atteinte, le régime de la bille est permanent, c'est-à-dire que son mouvement peut être considéré comme uniforme. La résultante des forces extérieures s'annule alors.

La tâche proposée dans la question 2.c) est de type (T3). Il s'agit d'une vérification en remplaçant la fonction $t \mapsto V(t)$ et sa dérivée dans l'équation différentielle.

III.4.4. Bilan de l'analyse des exercices

Pour les tâches de types (T1), l'établissement de l'équation différentielle se fait à partir des éléments caractéristiques du phénomène étudié, et la technique nécessite alors des compétences de physique (application de la deuxième loi de Newton, loi d'additivité des tensions ...).

On a pu remarquer que les types de tâches (T2) et (T3) concernant la résolution analytique d'une équation différentielle renvoient à une même organisation praxéologique, qui ne diffère pas totalement de l'organisation observée dans les manuels de mathématiques et s'articule autour de deux points :

- une équation différentielle (donnée ou à déterminer)
- une fonction donnée (conformément aux instructions du programme de physique sur la résolution analytique) qui doit vérifier l'équation différentielle ; ou bien c'est la forme générale de cette fonction qui est donnée et il s'agit ensuite de trouver les coefficients.

L'accomplissement de ces deux types de tâches n'exige pas de compétences de la physique car les techniques et les éléments technologiques relèvent des compétences mathématiques. Par exemple pour accomplir la tâche de type (T2) "Résoudre une équation différentielle (E)" la technique imposée consiste à vérifier si une fonction, dont l'expression est donnée, satisfait bien l'équation (E). Ce qui est attendu, c'est une substitution de l'expression de la fonction donnée dans l'équation différentielle. Cette technique, ainsi que les éléments technologiques, sont de nature mathématique.

Mais le constat majeur porte sur l'écriture de ladite solution et sur la "problématique" de la "résolution" qui, à l'instar des remarques faites au paragraphe précédent, montre l'absence de cohérence avec les mathématiques. En effet, dans les ouvrages de physique, la solution – lorsqu'elle n'est pas donnée explicitement - est proposée sous la forme "$y = Ae^{kt} + B$, A, B et k étant des constantes".

Outre le fait que l'on ne fait ainsi aucune référence aux connaissances supposées acquises en mathématiques, on constate une première difficulté liée à la variable qui est "t" et non "x" et, plus généralement, aux changements de notation qui permettent à l'élève de passer de la solution $y = ke^{ax} - b/a$ à celle écrite ci-dessus.

Pour ce qui concerne les types de tâches connexes, on a pu constater l'apparition de deux techniques pour déterminer graphiquement la constante de temps

- construction de la tangente à la courbe de la fonction solution de l'équation différentielle, puis lecture directe sur le graphique : voir l'analyse de l'exercice au III.2.2. b.

- construction de la courbe du logarithme d'une fonction (avec utilisation de la dérivée logarithmique au départ) : voir exercice III. 2. 1.a.

Si la première technique apparaît dans les situations que nous avons analysées en mathématiques, la deuxième n'est cependant pas attendue.

De même, le type de tâche "détermination de la vitesse limite" fait apparaitre une nouvelle organisation praxéologique, comparativement à l'organisation mathématique figurant dans les manuels de mathématiques : nouvelle technique et nouveaux éléments technologico-théoriques.

III.5. Synthèse de l'analyse des ouvrages de physique

L'analyse des manuels que nous avons faite a porté sur différents points : le lieu d'apparition de la notion d'équation différentielle (et son extension dans l'ensemble des domaines a priori concernés), les liens établis avec les connaissances relevant du programme de mathématiques, les notations utilisées et leur correspondance avec les notations utilisées en mathématiques. Du point de vue didactique, notre problématique a donc été inspirée fortement de la théorie anthropologique, notamment les approches écologique et praxéologique de Chevallard. Ainsi, notre analyse de la continuité s'est focalisée sur la question des organisations praxéologiques physiques, ainsi que sur les représentations en termes de registres sémiotiques (Duval). Nous donnons ci-dessous quelques éléments tirés d'une telle approche menée sur les ouvrages de physique de terminale actuels.

III.5.1. Lieux d'apparition

Le concept d'équation différentielle apparaît la première fois dans le chapitre « Loi de décroissance radioactive » dans l'ouvrage de la collection Microméga (Hatier, 2002). Par contre, dans ce chapitre (radioactivité) l'expression "équation différentielle" n'est pas utilisée et l'idée même est évitée : au mieux, une "notation différentielle" est utilisée, qui est obtenue par un jeu de notations et de passage à la limite. L'expression "équation différentielle" apparaît alors au moment de l'étude des circuits RC (charge et décharge d'un condensateur dans une résistance) (par exemple dans les ouvrages chez Breal (2002) dans la collection Parisi (Belin, 2002), l'expression étant parfois introduite sans précaution ni information particulière.

III.5.2. Les liens avec les mathématiques

Le concept d'équation différentielle, lorsqu'il apparaît la première fois, ne fait pas pour autant l'objet d'une attention particulière quant à sa nature et ou à son étude en mathématiques.

Suivant les ouvrages, on utilise une expression du type « La solution ... peut être proposée... » (avec donc une forme impersonnelle bien prudente), ou du type « ... là, on reconnaît... » (avec un pronom personnel qui, s'il désigne l'élève suppose, que ce dernier connaît cette équation et donc sa solution).

Quelques ouvrages font un effort d'explication, en indiquant que la solution de cette équation différentielle est « une fonction dont la dérivée est proportionnelle à la fonction elle-même : elle est donc de type exponentiel », ou des indications en marge : « L'équation différentielle $f'(x) = k.f(x)$ a pour solution $f(x) = Ce^{kx}$ »

L'écriture de la solution générale, ainsi que le mode de détermination des "paramètres" est par contre en discontinuité avec la façon de faire en mathématiques. En effet, les élèves apprennent en mathématiques à se ramener à une forme "canonique" $y' = ay + b$", pour laquelle ils sont censés connaître la solution générale, sous la forme $y = f(x) = ke^{ax} -b/a$. Dans les ouvrages de physique, on trouve au mieux une forme "mathématique" de l'équation différentielle de type $du/dt = \alpha u + \beta$ (u étant la grandeur physique qui évolue en fonction du temps), écrite comme $y' = \alpha y + \beta$. Les solutions sont alors de la forme "$y = Ae^{\alpha x} + B$, A, B et α étant des constantes".

En considérant cette correspondance de notations entre celles attendues en mathématiques et celles utilisées en physique, on peut mesurer l'écart qu'ont à franchir les élèves :

	En mathématiques	**En physique**
Variable	x	t
Dérivée première d'une fonction	f' la dérivée d'une fonction f	$\frac{du}{dt}$ la dérivée, le débit ... de la grandeur u
Équation différentielle (notation standard)	$y' = ay + b$	$\frac{du}{dt} + \alpha u = \beta$ autre notation : $\dot{u} + \alpha u = \beta$
Solution générale	$y = f(x) = ke^{ax} - b/a$	$u = Ae^{-\alpha t} + B$

Tableau 16 : Notations et relations dans les deux disciplines

On imagine les difficultés qui peuvent apparaître chez les élèves dans la mise en correspondance entre $y = ke^{ax} - b/a$ et $u = Ae^{-\alpha t} + B$. (de nombreux manuels notent la fonction solution par *u* et non *u(t)*.

Au niveau de la résolution proprement dite, en physique on ne leur demande pas de connaître la solution mais, au mieux, de vérifier que la solution qu'on leur fournit convient, la procédure visée consistant à passer la relation à la "moulinette" de la dérivation et à effectuer quelques manipulations algébriques où se glissera la fameuse « prise en compte des conditions initiales ». Ce faisant, la distinction entre paramètre du système et variable (valeur initiale), pourtant parfaitement pertinente, aussi bien du point de vue de la physique (le paramètre ne dépend pas, par nature des conditions initiales), que mathématique (sélection d'une solution particulière parmi une famille de fonctions) est complètement occultée.

D'un autre point de vue, on peut regretter le fait que l'accomplissement de certains types de tâches s'accompagne très peu explicitement de tâches de transition maths-physique (MP) ou physique-maths (PM), comme nous l'avons résumé dans le schéma ci-dessous (voir page 184).

Entrée : type de tâche physique

↓ *Tâches de transition*

Traitement : technique/technologie mathématique (parfois physique aussi)

↓ *Tâches de transition*

Sortie : interprétation physique

D'ailleurs, malgré la diversité de registres de représentation utilisée pour l'étude des situations conduisant à une équation différentielle, le constat du caractère implicite des tâches de transition se révèle aussi. L'articulation entre différents registres, dans la plupart des cas, s'appuie sur un cadre de rationalité (souvent mathématique).

III.6. Synthèse de l'analyse des manuels

Place des équations différentielles

Il ressort de notre analyse des manuels que dans les deux disciplines (mathématiques et physique) les équations différentielles du premier ordre occupent une place importante compte tenu du nombre de situations dans lesquelles elles interviennent.

En mathématiques, elles apparaissent dans plusieurs domaines, mais les plus utilisés sont les domaines de la radioactivité, de l'électricité (circuits RC et RL) et de la mécanique. Sur les huit analysés, la radioactivité est le domaine où l'on trouve plus d'équations différentielles. Ceci n'est pas surprenant car ce domaine a été choisi par le groupe d'experts des programmes scolaires pour concrétiser la continuité didactique, autour de l'enseignement des équations différentielles, dans le document d'accompagnement du programme des mathématiques (2002) : des commentaires et exemples y sont donnés.

Dès lors, on peut alors s'attendre à ce que les manuels de physique prennent en compte, de façon complémentaire, l'esprit du programme des mathématiques et des documents d'accompagnement qui se trouve concrétisé dans les manuels de mathématiques. Cependant le premier constat vient de l'absence des équations différentielles dans le chapitre qui traite de la radioactivité.

Situations de modélisations

Lorsqu'on a examiné les situations de modélisation proposées en mathématiques on y a trouvé parfois des renvois vers le cours de physique. Ceci est vrai même pour des situations issues de la radioactivité dans lesquelles on a relevé un manque de cohérence de notations autour de la traduction mathématique de l'expérience sur la décroissance radioactive. Un même texte trouvé dans différents manuels conduit, soit à relation d'égalité « = », soit à une relation d'approximation « ≈ ». Ceci peut être source de difficultés chez les élèves, et même chez les enseignants.

Certaines situations de modélisation qui sont traitées en physique sont transposées dans les manuels de mathématiques, mais vidées de leur sens physique. Ce sont des situations que nous avons qualifiées d'habillage : schémas erronés, conditions expérimentales impossibles, etc. Ce constat rejoint les résultats des analyses des manuels faites par Rodriguez (2007) dans sa thèse. Elle montre que les exercices proposés dans les manuels de mathématiques se situent dans le domaine pseudo-concret (le modèle est donné, et non construit par les élèves) :

> « On ne part pas du domaine réel, l'étape de situation réelle est donc toujours placée dans le domaine pseudo-concret car l'énoncé de l'exercice est déjà un modèle pseudo-concret. L'étape de généralisation et de prévision est absente ». (Rodriguez 2007)

Nous avons présenté p.89 le schéma simplifié suivant, indiquant a priori les grandes étapes de vue de l'articulation des deux cadres de rationalité (mathématiques et physique) concernant l'étude des situations de modélisation :

$$
\begin{tikzcd}
\text{1) Physique} \arrow[d, "\text{PM}"'] & \text{4) Physique} \arrow[l] \\
\text{2) Maths} \arrow[r] & \text{3) Maths} \arrow[u, "\text{MP}"]
\end{tikzcd}
$$

Cette analyse des situations de modélisation a permis aussi de repérer certaines contraintes didactiques susceptibles de peser sur la continuité didactique, et aussi sur le jeu de cadres de rationalité entre les deux disciplines. Il y a très peu de tâches de transition, censées être explicitement à la charge de l'élève, entre les deux cadres de rationalité : soit elles (les tâches de transitions) sont déjà exécutées par l'énoncé, soit la formulation de la question occulte les possibilités de les envisager. C'est ainsi que nous résumons ce constat par le schéma suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\text{1) Physique} \arrow[d] \arrow[r, phantom, "?"] & \text{4) Physique} \\
\text{2) Maths} \arrow[r] & \text{3) Maths} \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}
$$

En mathématiques, la tâche de transition dans le passage (1-2) n'est pas souvent à la charge de l'élève, ce qui n'est pas le cas en physique. Le passage (2-3) concerne la ou les tâche(s) de résolution. Mais la tâche d'interprétation, dans le passage (3-4), apparait peu ou pas du tout en mathématiques, alors qu'elle est souvent implicite ou à la charge de l'énoncé en physique. Quant à la tâche d'interprétation dans le passage (3-4), c'est-à-dire celle du retour à la situation de départ, elle est quasi-inexistante en mathématiques et apparait très peu en physique.

Fausse continuité didactique

Ces deux disciplines semblent s'ignorer. On trouve dans les manuels des deux disciples des types de tâches similaires mais qui utilisent des techniques différentes. Ce qui est tout à fait normal compte tenue de l'épistémologie de chacune des deux disciplines. Mais on peut alors se poser la question de la possibilité de leur coexistence.

Nous avons aussi constaté, en mathématiques comme en physique, le caractère répétitif de ces types de tâches, dans leur formulation et leur contexte d'apparition et de traitement. Une telle organisation n'est pas sans conséquences dans les apprentissages et la conceptualisation des savoirs chez les élèves, qui n'ont pas assez de choix et de marge de manœuvre. Ils travaillent sur des tâches répétitives, routinières et sont orientés vers l'utilisation systématique d'une technique standard et figée, dont les composantes technologiques ne sont pas toujours disponibles à leur niveau. Ce constat va dans le sens de l'analyse de Rodriguez (2007) et Rogalski (2006) sur l'absence de la mise en équation différentielle dans la quasi-totalité des situations.

Enfin, du point de vue des représentations sémiotiques, il apparaît une grande diversité de registres de représentation dans les manuels. Dans les manuels de mathématiques, le registre des illustrations (comme les schémas qui accompagnent les énoncés) est très peu ou presque pas exploité.

L'analyse des manuels nous a montré que la mise en relation entre les mathématiques et la physique se fait très vite. On a aussi constaté dans certains ouvrages (surtout de physique) qu'il y a très peu de confrontation entre les courbes dites expérimentales et les courbes théoriques, qui peut pourtant être un moment crucial pour la concrétisation de la continuité didactique. Ce jeu d'allers-retours entre le "théorique" et "l'expérimental" peut être l'occasion de travailler la dialectique exact/approché (comme dans le cas de l'étude de la décroissance radioactive).

CHAPITRE VI :
La méthode d'Euler dans l'enseignement de mathématiques et de physique

I. Introduction

L'introduction de la méthode d'Euler dans les programmes de mathématiques et de physique permet de considérer une nouvelle approche dans le traitement des équations différentielles. C'est une approche numérique dont le principal habitat en mathématiques est la fonction exponentielle et en physique, l'étude mathématiques des situations de modélisations et particulièrement, le traitement numérique des équations différentielles du premier ordre. Dès lors, la méthode d'Euler prend une place majeure dans la relation mathématique/physique. La continuité didactique apparaît potentiellement en effet à la fois au niveau des fondements de la méthode (discrétisation et approximation affine) et au niveau de son informatisation qui permet en mathématiques, la construction de la courbe approchée de la fonction exponentielle et en physique, d'aborder des cas d'équations différentielles non linéaires.

Mais l'articulation entre les disciplines est là aussi source de questions :

- quel statut et quel rôle de la méthode dans ces disciplines : objet mathématique, outil de construction / d'investigation / de résolution, méthode informatique, etc. ?

- l'informatisation de la méthode, dont l'effet mérite également une analyse, tant du point de vue de la transposition que du point de vue de l'introduction d'un nouvel ensemble de connaissances et compétences à acquérir, contribue-t-elle à l'objectif de la continuité didactique via l'utilisation des TICE ?

- quelle mise en relation des deux disciplines au niveau de la méthode elle-même ? (Définition de la dérivée et approximation affine, tangente ; traitement sur un ensemble discret ; prise en compte des erreurs d'approximation) ?

- et plus généralement, quelle gestion didactique des dialectiques convoquées : dialectique "discret/continu" et "exact/approché" comme nous l'avons évoqué ci-dessus, mais aussi dialectique "local/global" ?

À l'instar de l'analyse présentée dans les deux précédents chapitres nous avons examiné la place de la méthode d'Euler appliquée aux équations différentielles en mathématiques et en physique, à la fois dans les programmes officiels, les documents d'accompagnement et les manuels scolaires.

II. Méthodologie

Pour cette étude, en mathématiques, nous avons analysé les programmes de premières S (2001) et de terminale S (2002) ainsi que les documents d'accompagnement desdits programmes. Le programme de première nous fournit les indices sur les premiers éléments d'introduction de la méthode d'Euler dans l'enseignement secondaire ; le programme de terminale nous permet d'identifier les intentions didactiques relatives à l'introduction de cette méthode. Cette analyse est suivie d'une analyse des manuels. Nous avons choisis de n'analyser que les manuels de terminale S afin d'étudier leur relation avec les manuels de physique du même niveau scolaire. Les manuels analysés sont ceux que nous avons choisis et présentés dans le chapitre précédent.

Parallèlement à cette analyse des documents mathématiques, nous avons choisi d'analyser les programmes et les documents d'accompagnement de terminale S de physique en vigueur (2002). Ici aussi, les manuels analysés sont ceux choisis et présentés dans le chapitre précédent.

Pour l'étude des manuels, 4 jeux de questions pour analyser la place, le rôle et le lien mathématiques-physique.

1. Quelle place est attribuée à la méthode ? Il s'agit de s'intéresser au lieu d'apparition et à la forme sous laquelle elle apparaît (cours, les exercices, activité expérimentale, activité informatique, …) ainsi qu'au nombre d'exercices qui la mettent en œuvre.

2. Comment la méthode d'Euler est-elle présentée ? Il s'agit d'examiner le discours qui permet de justifier l'introduction de la méthode en terminale S : est-ce un discours historique, l'évocation de l'autre discipline, une présentation "informatique" ? Par ailleurs, il s'agit

d'examiner avec quelle rigueur l'explication de la méthode est donnée, en particulier au niveau des notations et de l'approximation affine.

3. Quel statut attribué est à la méthode ? Méthode de "résolution" (au même titre que la résolution analytique) ou une méthode de construction par "approximation successives"?[51] (application "technique" d'une méthode mathématique comme l'est la primitivation, par exemple, méthode "informatique", etc.).

4. Comment la méthode d'Euler est mise en œuvre ? Avec quels outils (papier-crayon, calculette programmable, logiciel spécifique), sur quels types de questions ?

III. La méthode d'Euler dans les programmes et documents d'accompagnement de mathématiques

En mathématiques, la méthode d'Euler apparaît pour la première fois, dans les programmes des classes de 1[er] première scientifique où elle doit être appliquée sur des cas simples de primitivation. Son étude est poursuivie en classe de terminale S.

III.1. Le programme de première scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Dérivation [...] Tangente à la courbe représentative d'une fonction f dérivable ; approximation affine associée de la fonction.	On construira point par point un ou deux exemples d'approximation de courbe intégrale définie par $y' = f(t)$ et $y(0) = y_0$ en utilisant l'approximation $\Delta f \approx f'(a)\,\Delta t$	On pourra observer sur grapheur ou tableur l'erreur commise dans le cas où on connaît une expression de la fonction *y*

Tableau 17 : Extrait du programme (2001) de la classe de première S

Le programme fournit des informations sur le type de problèmes qui font appel à une utilisation de la méthode d'Euler en 1[ere] S ; la méthode doit s'appliquer au cas de construction point par point des courbes de fonctions *f* définies par la relation $y' = f(t)$ qui est un cas simple d'équation différentielle dont les solutions exactes s'obtiennent par « primitivation » c'est-à-dire, par la recherche des primitives.

51 Distinction qui peut être très bien perçue par des élèves - cf. thèse D. Beaufils et publications INRP Beaufils-Richoux)

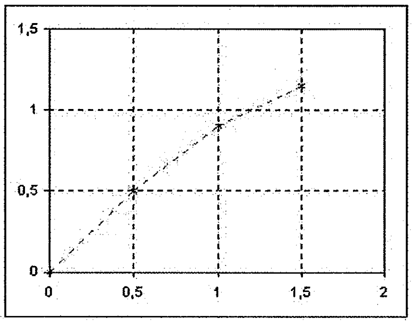
Le document d'accompagnement des programmes de 1[ere] S comporte quelques paragraphes sur le traitement de cette méthode. On y trouve un exemple proposé par le groupe d'experts des programmes scolaires (GEPS) de mathématiques est celui de la construction point par point, dans un intervalle, de la courbe d'une fonction dont on ne connaît que sa dérivée (CNDP 2001, p.64).

(…) On considère la fonction f définie par $t \mapsto f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et on souhaite construire point par point dans l'intervalle [0, 2], une approximation de la fonction F vérifiant :

$F'(t) = f(t)$ et $F(0) = 0$

(…) Sur papier millimétré, on approche successivement $F(0,5)$ et $F(1)$. On a :

$F(0,5) - F(0) \approx 0,5 f(0)$. Ainsi, $F(0,5) \approx 0,5$.

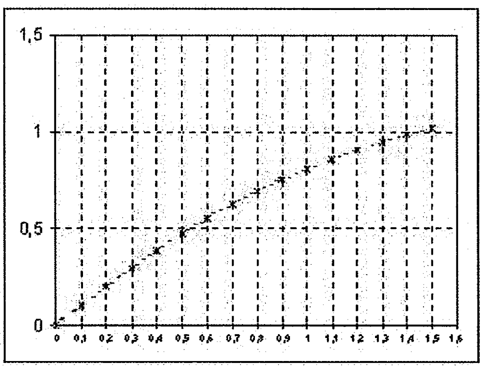


On réitère à partir $F(0,5)$.

$F(1) - F(0,5) \approx 0,5 f(0,5)$, etc.

Au tableur, on peut affiner le pas h en exploitant les coordonnées définies par la relation de récurrence suivante : $x_n = nh$ et $y_{n+1} = y_n + h\dfrac{1}{1+(nh)^2}$

Ci-dessous une représentation graphique pour $h = 0,1$.



III.1.1. Intérêt de la méthode d'Euler

La fonction choisie dans cet exemple est la dérivée sur ***R*** de la fonction arctangente[52] dont l'expression analytique n'est pas connue a priori par les élèves. Le choix de travailler sur cette fonction est, peut-être, de ne pas permettre aux élèves d'accéder à la fonction primitive. Ce qui les contraint à ne travailler que sur la relation $y' = f(t)$. Mais conformément aux indications du programme, la méthode d'Euler utilisée ici doit permettre la construction de courbe approchée d'une fonction dont on ne connait pas l'expression. C'est ce que l'on peut comprendre cette citation du document d'accompagnement.

> « Ce travail prépare la méthode d'Euler sur les équations différentielles qui permet de représenter des approximations des solutions d'équations différentielles sans les avoir déterminer analytiquement »
>
> (CNDP 2001, p. 64)

Ce commentaire donne des informations justifiant l'introduction de la méthode d'Euler à ce niveau (1[ere] S) : son utilisation en terminale S dans le cas des traitements graphiques des solutions d'équations différentielles.

Cependant, dans cette partie concernant l'étude de la méthode d'Euler, le texte du programme de première S ainsi que le document d'accompagnement de ce programme ne font aucune référence à la physique. Mais nous retrouvons dans le cédérom joint au document d'accompagnement, des activités[53] sur la résolution des équations différentielles par la méthode d'Euler. Dans les commentaires, on peut lire l'intérêt mathématique accordé à cette méthode :

> « Par ailleurs la nécessité d'obtenir une solution exacte ne semble pas toujours nécessaire. Un problème d'équilibre, qu'il soit mécanique, électrique ou autre ne nécessite souvent qu'une étude locale, pour de faibles amplitudes de la variable ».

On peut considérer que la méthode d'Euler s'inscrit dans la problématique du calcul approché dont l'intérêt pour les traitements locaux des fonctions (par exemple), est la détermination des valeurs approchées des fonctions ; ce qui rejoint en partie le travail des "physiciens".

[52] La fonction arctangente n'est pas normalement étudiée en classe de première.

[53] Les activités proposées dans le cédérom concernent la résolution des équations différentielles par la méthode d'Euler. On peut supposer que ces activités sont destinées aux enseignants et non aux élèves. En effet, les élèves ne connaissent pas ce que c'est qu'une équation différentielle ; en plus les équations différentielles traitées ne pas au programme de terminale S. On y retrouve la résolution numérique de l'équation différentielle $y' = \sqrt{y}$ qui n'est pas linéaire ou l'équation différentielle du second degré de type $y'' + \omega^2 y = 0$.

Le lien avec la physique est implicite. Il doit se faire sans doute de manière explicite en terminale ; nous rappelons qu'en physique la méthode d'Euler n'apparaît qu'au niveau de la classe terminale.

Cependant, sa mise en œuvre conduit à la convocation de deux types d'environnement : "papier/crayon" et "informatique". C'est pour montrer les possibilités d'amélioration des résultats, en faisant varier le pas de calcul que la nécessité de recourir à l'informatique comme "outil" s'impose. Les calculs dans l'environnement papier/crayon (papier millimétré) peuvent être très coûteux quand le pas devient "petit". Le tableur/grapheur offre les moyens d'effectuer de grands calculs et de construire la courbe des valeurs numériques obtenues.

III.1.2. Remarques

On peut aussi remarquer que le travail réalisé conduit à la discrétisation de la fonction (dont on ne connait pas l'expression). On peut voir sur le graphique que les points obtenus à partir des valeurs approchées de la fonction F, sont reliés entre eux et l'on obtient une courbe affine par morceau. Mais reliés ces points suppose l'existence d'une fonction affine par morceau et qui est continue. Il y a là un jeu de passage implicite entre le discret et le continu.

Nous rappelons que l'auteur renvoie le traitement de la question sur l'existence la fonction F en terminale. Quant à sa continuité, elle est acquise par hypothèse car le fait de poser $F'(t) = f(t)$, ($t \in [0 ; 2]$) suppose que F est dérivable dans cet intervalle et donc, continue. Pour la fonction affine par morceau, la continuité tient sur le fait que les morceaux sont construite sur chaque intervalle $[A_i ; A_{i+1}]$ où $A_{i\,(i \neq 0)}$ sont les points de raccordement.

La complexité de cette activité destinée à la construction d'une courbe approchée tient sur la multiplicité d'inconnues à gérer :

- l'expression analytique de la fonction F telle $F'(t) = f(t)$ est inconnue
- la courbe construite est une courbe d'une fonction affine définie par morceau. L'expression de cette fonction n'est pas précisé (inconnue)[54]
- la courbe exacte de la fonction F est inconnue

En plus, l'activité ne renseigne pas sur le degré de fidélité de la courbe obtenue, c'est-à-dire sur l'erreur commise au cours de cette approximation. Si le pas est « bien choisi », la courbe

[54] L'obtention de l'expression de la fonction affine par morceau n'est pas le but de l'activité. Elle est obtenue grâce à la formule de l'approximation affine dans chaque intervalle $[A_i ; A_{i+1}]$ (où A_i, hormis A_0, sont les points obtenue par approximation).

affine par morceau (définie par une fonction affine par morceau, donc non dérivable) doit être considérée "proche" de la courbe exacte (dont la fonction est dérivable).

Même en affinant le pas de calcul, il n'y a que l'enseignant qui est mieux informé sur la convergence de la méthode ; l'élève lui, n'aura aucun moyen de vérifier si la courbe construite est la plus proche qu'une autre. Il aurait fallu construire dans un même graphique les deux courbes (exacte et approchée) afin d'en estimer « l'écart ».

III.2. Le programme de terminale S (2002)

La méthode d'Euler abordée en terminale S, apparaît à la fois lors de l'étude de la fonction exponentielle et dans le cadre du traitement des équations différentielles du premier ordre (où une part importante est accordée à l'interaction mathématiques-physique des nouveaux programmes de terminale S).

> MODALITES DE MISE EN ŒUVRE
>
> …
>
> *On construira avec la méthode d'Euler introduite en première des représentations graphiques approchées de f dans le cas k = 1 ; on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits.*
>
> COMMENTAIRES
>
> *Ce travail se fera très tôt dans l'année car il est central dans le programme de mathématiques et de physique. Il fournit un premier contact avec la notion d'équation différentielle et montre comment étudier une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite. La méthode d'Euler fait apparaître une suite géométrique et donne l'idée que l'exponentielle est l'analogue continue de la notion de suite géométrique, ce que l'équation fonctionnelle confirme.*

Dans le document d'accompagnement, l'utilisation de la méthode d'Euler est placée dans le prolongement du travail déjà fait en classe de première et l'on peut bien voir, à travers l'exemple repris ci-dessous que l'application de la méthode s'élargit au traitement des équations différentielles.

> « En continuité avec le travail fait en première, on peut utiliser la méthode d'Euler pour avoir l'allure du graphe sur l'intervalle [0, t] de la fonction dérivable vérifiant ' = , (0) = 1. Pour cela, on discrétise l'intervalle [0, t] en n intervalles d'amplitude t/n, et on trace entre 0 et t le graphe d'une fonction affine par morceaux, obtenu en reliant par des segments les points $(kt/n, y_k)$, k = 0,…,n, avec :
>
> $y_0 = 1$ et $y_{k+1} = y_k (1+ t/n)$
>
> soit : $y_k = (1+ t/n)^k$, k = 0,…, n en particulier $y_n = (1+t/n)^n$ » (CNDP 2001, p. 76)

Les étapes du traitement de la méthode sont explicitement données. Ce seul passage fait apparaître un jeu d'aller-retour entre le continu (équation différentielle) et le discret (suite numérique), mais aussi des changements de cadres et de registres. Nous y reviendrons lors de l'analyse des exercices. Ce qui apparaît, c'est une problématique de la construction approchée de la courbe d'une fonction dont on ne connait pas l'expression analytique :

> ... Une équation étant posée ou donnée, les élèves pourront vérifier si telle ou telle fonction déjà connue en est solution ; sinon, ils pourront être amenés à en approcher une à l'aide de la méthode d'Euler vue en première. (CNDP 2001 p. 31)

Commentaire : la fonction affine par morceau est donc une fonction continue ! On n'écrit pas ladite fonction, et donc la continuité est "graphique"... Outre cette subtilité, cela pose un problème par rapport à la "discrétisation" et notamment au regard de la physique qui, elle, travaille quasiment exclusivement avec des ensembles de points (on ne fait pas d'interpolation entre les points expérimentaux, par exemple[55]).

Les raisons de l'utilisation de la méthode d'Euler ne sont pas qu'intra-mathématiques. Elles sont aussi liées à l'évolution des autres disciplines dont les effets apparaissent dans ce document à travers le choix des thèmes étudiés (qui traitent des phénomènes modélisés par une équation différentielle du premier ordre). On peut citer par exemple le traitement du cas de « l'équation logistique », qui est une modélisation possible de l'évolution de certaines populations :

> « L'équation logistique, proposée par Verhulst en 1838, est de la forme $dP/dt = aP(m - P)$.
>
> Les élèves peuvent commencer par déterminer les solutions constantes : les deux possibilités étant $P(t) = 0$ pour tout t, ou bien $P(t) = m$ pour tout t ; ensuite, ils peuvent déterminer le signe de $P'(0)$ selon que $0 < P(0) < m$ ou $m < P(0)$; compte tenu du problème, on étudie ci-dessous les solutions telles que $P(t) \geq 0$ pour tout t.
>
> À ce stade, on peut avoir une idée intuitive du comportement des solutions, éventuellement confortée par le recours à la méthode d'Euler ». (CNDP 2002, p. 33).

La dernière phrase de cette citation nous conduit à considérer que la méthode d'Euler est un outil mathématique qui permet aux élèves de se représenter intuitivement le comportement des solutions d'une équation différentielle à travers des représentations graphiques approchées. De plus à travers le traitement de l'exemple de "l'équation logistique" (p. 33) dans le document d'accompagnement, nous imaginons les possibilités d'étendre la méthode

[55] Ce qui représente une difficulté bien connue pour les élèves : sur un ensemble de points présentant une tendance à l'alignement, on peut tracer une droite (approximant un nuage des points) qui ne passe par aucun point !

d'Euler à d'autres situations modélisées par une équation différentielle du premier degré du même type[56] (non linéaire).

III.3. Synthèse

La méthode d'Euler apparaît pour la première fois en classe de première S. Le champ de problèmes dans lequel il apparaît se réfère à un contexte intra-mathématique : la méthode doit permettre la construction de courbe intégrale approchée définies par la relation $y' = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$ en utilisant l'approximation $\Delta f = f(a)\Delta t$. Le principe (c'est-à-dire les grandes étapes) d'utilisation de cette méthode et les outils (informatiques ou autres) permettant de l'accomplir ne sont pas précisés. C'est plutôt dans le document d'accompagnement de ce programme le principe ainsi que les outils sont explicités, à travers le traitement de quelques exemples. Le tableur et le papier millimétré sont effet utilisés comme un "outil" pour faciliter les calculs (pour le premier outil) et pour représenter graphiquement la courbe approchée. S'agissant du lien entre les mathématiques et la physique relativement à l'apparition de cette méthode, il est quasi-inexistant aussi bien dans les programmes et que les documents d'accompagnement de première S.

La méthode d'Euler est reprise dans les programmes dans le même contexte qu'en classe de première. Elle doit permettre d'approcher la courbe de la fonction exponentielle définie par une relation $f' = f$ et $f(0) = 1$.. On retrouve dans le texte du programme quelques passages sur le lien entre les mathématiques et la physique. Plus particulièrement, on y évoque une relation entre le travail qui doit se faire en mathématiques autour des équations différentielles (y compris le travail sur Euler) et le cours de physique. Par ailleurs, dans le document d'accompagnement des programmes ce lien entre les deux disciplines n'est pas immédiat ; un exemple (sur une situation en démographie) où peut s'appliquer la méthode d'Euler est donné. À partir de ce seul exemple où le recours à la méthode est explicitement cité, on peut bien comprendre que cette méthode peut être élargie au traitement d'autres situations, issues d'autres domaines (comme la physique), conduisant à une équation différentielle du premier ordre (linéaire ou non).

Quant à l'informatisation de la méthode d'Euler, comme nous l'avons souligné plus haut, elle trouve son intérêt dans les calculs approchés, qui deviennent laborieux dans l'environnement

[56] Nous rappelons que les équations différentielles non linéaires du premier ordre ne sont pas au programme de mathématiques de terminale S

papier/crayon quand le pas de calcul est très petit. Cependant elle apparaît indépendamment du traitement des situations issues de la physique. En effet, on ne trouve aucun paragraphe explicitant les étapes d'utilisation de la méthode d'Euler dans un environnement informatique (ni dans le programme ni dans le document d'accompagnement). Néanmoins, il a été donné dans le cédérom diffusé avec le document d'accompagnement, des exemples de simulation de courbe de solutions d'équations différentielles. L'animation ne permet pas de voir les étapes de calculs de la méthode d'Euler.

IV. Méthode d'Euler dans les manuels de mathématiques

Nous présentons dans le tableau ci-dessous, quelques éléments caractéristiques relatifs à l'introduction et à l'utilisation de la méthode d'Euler dans les manuels de mathématiques.

Nous reprenons les huit manuels consultés dans le chapitre précédent. Le tableau n'en compte que six, en raison de la similarité de certains qui fournissent quasiment les mêmes informations que les trois autres non présentés.

	Lieu d'apparition	Objectif	Lien avec la physique	Connaissance en jeu
Fractale	Chap. 4 : fonction exponentielle (p. 93)	Construire une fonction affine par morceau (Excelle)	Aucun	- construction d'une suite numérique - mise en évidence du pas de calcul - construction de la courbe - construction d'autres courbes en faisant varier le pas
Hyperbole	Chap. 1 : La fonction exponentielle (p.10)	- Activité d'approche (Rappel du principe de la méthode ; étude d'un cas de primitivation - Exercice résolu : construire une représentation graphique de la fonction exponentielle avec la méthode d'Euler. - Exercice résolu : construire des tracés par la méthode d'Euler avec des pas différents	Aucun	- construction de la courbe approchée d'une fonction - discrétisation de la fonction - construction d'une suite numérique
	Chap. 2 : Equation différentielles y'= ay +b	Activité[57] 2 : Salinité d'une solution aqueuse		
Déclic	Chap. 3 : dérivées et primitives (p.78)	Connaitre le principe de la méthode puis appliquer sur des cas simples[58] :	Aucun	- construction de la courbe approchée d'une fonction - estimation de l'erreur
	Chap. 4 : fonction exponentielle (p.101)	Donner l'allure de la courbe d'une fonction égale à sa dérivée		- discrétisation de la fonction - approximation affine - construction d'une suite - construction d'une courbe question sur les propriétés de la fonction
Math'x	Chap. 4 : fonction exponentielle (p.115)	Construire pas à pas une solution approchée de l'équation y'=y	Aucun	- équation différentielle tangente à une courbe en un point - approximation affine - mise en évidence du pas de calcul

[57] Cette situation a pour objectif de « montrer comment s'obtient l'équation différentielle qui modélise une situation. Tracer une représentation graphique approchée d'une situation ». elle est composée de deux parties : « 1. Mise en équation » et « 2. Avec la méthode d'Euler ». Cette deuxième partie est purement mathématique.

[58] Cas de la primitivation

				- construction de la courbe à la main + superposition des courbes
Repère	Néant			
Transmath	Chap 3 : dérivation (p. 65) Chap. 4 : la fonction exponentielle (p. 84)	Résolution numérique de y'= g(x) Utiliser la méthode d'Euler pour construire la courbe approchée de l'exponentielle	justification de son utilisation : la physique	Rappel du principe de la méthode et Application : primitivation - équation différentielle - discrétisation - pas et variation - suite - tableur - construction de la courbe+ superposition

Tableau 18 synoptique sur la place de la méthode d'Euler dans les manuels de mathématiques

IV. 1. Place de la méthode d'Euler

IV.1.1. Lieu d'apparition

Le tableau synoptique (tableau 18**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) contient des informations sur la place et le rôle de la méthode d'Euler dans les manuels scolaires de mathématiques. Il apparaît clairement que l'utilisation de la méthode d'Euler est à voir, principalement, avec l'étude de la fonction exponentielle. Certains manuels, en guise de rappel des notions de première, abordent cette méthode dans le chapitre sur la dérivation, en se limitant au seul cas de la primitivation.

IV.1.2. Nombre d'exercices

Pour mieux cerner la place accordée à la méthode d'Euler dans les manuels, nous complétons les informations du tableau 18 par un autre tableau dans lequel nous représentons le nombre des situations concernant la méthode d'Euler que nous comparons au nombre total de tâches sur la résolution des équations différentielles. Les chapitres concernés sont celui de la fonction exponentielle et celui des équations différentielles (quand ils ne font pas un seul chapitre).

Pour la lecture du tableau, par exemple dans le manuel Hyperbole, dans les Activités, le rapport " 1/0" signifie qu'il y a une tâche concernant la méthode d'Euler et qu'il n'y en a pas sur les équations différentielles (il s'agit dans ce cas d'une primitivation).

Nous reprenons dans ce tableau, la même répartition des rubriques telles qu'elles apparaissent dans les manuels à savoir "Activités, Cours, TD/TP, Exercices et problèmes".

	Activités	Cours	TD/TP	Exercices	TOTAL
Fractale	1/1	0/0	0/3	0/18	1/22
Math'X	1/2	0/0	0/1	0/0	1/3
Bréal	1/1	1/4	0/0	0/9	2/14
Déclic	1/1	0/0	0/4	0/12	1/17
Hyperbole	2/2	2/4	0/3	0/8	3/14
Transmath	0/0	0/0	1/2	0/9	1/11
Indice	2/2	1/5	0/0	6/32	9/39
TOTAL	7/7	4/13	1/12	6/88	18/120

Tableau 19 : Nombre de tâches sur la méthode d'Euler

Dans les 7 manuels analysés, la méthode d'Euler est apparue 7 fois dans les activités relatives à l'introduction de la fonction exponentielle et 4 fois dans des exercices résolus dans la partie "cours", une seule fois en TD/TP. Elle n'apparaît dans la partie "exercice et problèmes" que dans un seul manuel. Il s'agit de celui de la collection *Indice* où 6 exercices sur 32, sont consacrés à la méthode d'Euler.

On voit bien que la méthode d'Euler occupe une place très importance pour l'introduction de l'exponentielle, car les 7 activités relevées à ce sujet impliquent une utilisation de cette méthode. Ces activités conduisent à la construction d'une courbe approchée de la fonction exponentielle.

Dans les rubriques "TD/TP" ou "Exercices", le tableau 19 montre qu'il y a très peu de situations proposées dans lesquelles la méthode d'Euler est sollicitée de façon explicite ou non : 1 TD sur 12 et 6 exercices sur 120 (les exercices viennent d'un même manuel).

IV. 1.3. Mode d'introduction

- Le manuel Hyperbole rappelle que la méthode à été déjà abordée en classe de première. Il reprend la situation présentée dans le document d'accompagnement de la classe de 1[er] première S '(un cas de primitivation). La méthode d'Euler est ensuite appliquée pour la construction d'une courbe approchée de l'exponentielle en utilisant un tableur.

- De même, le manuel Transmath renvoie à la classe de première sur le principe de la méthode. La méthode est appliquée pour construire la courbe approchée de la fonction exponentielle (solution de l'équation $f' = f$ avec $f(0) = 1$) sur un tableur.

- le manuel Déclic rappelle l'expression de l'approximation affine au voisinage de 0, qui conduit à la construction de deux suites numériques. Les points obtenus à partir de ces suites permettent une visualisation sur un graphique des effets de l'approximation : courbe théorique exacte et courbe obtenue par Euler. L'exemple traité s'appuie sur un tableur-grapheur.

- le manuel Math'x ne fait pas de rappel. Une activité est donnée conduisant à la construction de la solution approchée de l'équation $y' = y$.

- Bréal : activité conduisant à la construction d'une courbe approchée de la fonction exponentielle. Pas de référence à la classe de première.

Fractale : activité 2 ; construction d'une fonction affine par morceau. Pas de rappel ni référence à la première.

Repère : néant. Aucune référence à la méthode d'Euler n'est faite dans cet ouvrage.

Indice : activité 2 : construction d'une courbe approchée d'une fonction solution d'une équation différentielle de type $y' = ay + b$. dans le cours, détermination d'une approximation de exp(1).

IV.2. Champ conceptuel de la méthode d'Euler

Le tableau 19 nous permet de comprendre la manière dont la méthode d'Euler est présentée, son champ conceptuel relatif, aussi de caractériser son statut. La notion de champ conceptuel, proposée par G. Vergnaud (1994) permet d'entreprendre une classification des situations qui peuvent être traitées à l'aide d'un même concept. Dans ce cas précis, cette notion permet de caractériser l'ensemble des situations, ainsi que les connaissances mathématiques, dont le traitement implique le recours à la méthode d'Euler, des procédures qui en découlent, mais aussi le symbolisme associé.

IV.2.1. Type de situations et rapport à la physique

D'après le tableau 19, la classe des problèmes relative à la méthode d'Euler dans les manuels de mathématiques se ramène essentiellement à la construction de courbes approchées d'une fonction définie par une équation de type $f' = f$ (où f est une fonction dérivable sur $\boldsymbol{R}$). Toutes les situations apparaissent, pour la plupart des cas, lors de l'étude de la fonction exponentielle. Ces situations sont toutes de nature intra-mathématique et la relation avec la physique (ou d'autres disciplines) n'est pas immédiate (c'est-à-dire qu'elles ne se rapportent pas directement à des situations relevant de la physique ou d'autres champs disciplinaires). Sauf quelques exceptions :

Le manuel Transmath présente, en début d'un TD (p. 65), l'intérêt futur de la méthode, par rapport à son utilisation en physique, sans toutefois fournir des situations de la physique :

> « le but de ce TD est de se familiariser avec la méthode d'Euler qui sera utilisée en physique pour construire des solutions approchées du type $f'(x) = g(x)$ où f est l'inconnue ».
> Transmath p. 65

Le manuel *Indice* fait aussi exception car il est le seul manuel parmi les 7 qui présente deux activités sur la méthode d'Euler, issues de la physique, pour introduire la fonction exponentielle (page 73).

IV.2.2. Notions mathématiques associées

Le recours à la méthode d'Euler dans les manuels fait émerger d'autres savoirs et savoir-faire (fonction exponentielle, dérivation, calcul des suites, approximation affine, tangente en un point de la courbe, ...) qui constituent son environnement conceptuel. Nous présentons dans ce qui suit, l'essentiel des notions (concepts) qui apparaissent avec la méthode d'Euler.

Nous présentons les principales notions mathématiques (environnement conceptuel) qui apparaissent lors de l'étude de l'étude des situations de construction de courbe approchée de fonction à l'aide de la méthode d'Euler

a) Fonction exponentielle

La notion de fonction exponentielle dans les 8 manuels analysés, traduit l'esprit du programme de terminale. Elle est présentée tantôt comme une définition tantôt comme une propriété ou un théorème.

> Définition : On appelle fonction exponentielle, l'unique fonction f dérivable sur R, telle que $f' = f$ *et* $f(0) = 1$., (Indice p. 74),
>
> Définition 1 : L'unique solution f dérivable sur R telle que $f' = f$ *et* $f(0) = 1$ est appelée fonction différentielle et notée *exp*. (Math'X p. 114)
>
> Théorème et Définition : Il existe une unique fonction f, dérivable sur R telle que pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ *et* $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**, on la note **exp.** (Hyperbole p. 12),
>
> Définition : Il existe une unique fonction dérivable sur R qui est égale à sa dérivée et qui prend la valeur 1 en 0. Cette fonction est notée **exp** et appelée fonction exponentielle.
> On a exp' = exp et exp(0) = 1. (Déclic p. 109)
>
> Définition et propriété :
>
> Soit a un nombre réel. On appelle solution sur l'intervalle I de l'équation différentielle $Y' = aY$ toute fonction, dérivable sur I, qui vérifie sur I : $f' = af$.
>
> Il existe une fonction f, dérivable sur R, solution de l'équation différentielle $Y' = Y$ et telle que f(0) = 1 que l'on appelle la fonction exponentielle. (Fractale p.94)

Dans la foulée, certains manuels introduisent la notion d'équation différentielle (Math'x p. 116).

b) Équation différentielle

La notion d'équation différentielle vient après que la fonction exponentielle a été introduite. Dans les manuels analysés, la résolution numérique (par Euler) n'est pas souvent abordée sauf dans le cas de la fonction exponentielle. Parmi les sept manuels analysés, nous avons relevé un seul cas (voir Hyperbole p. 41) où la méthode d'Euler est utilisée pour construire une courbe approchée d'une fonction inconnue f, solution d'une équation différentielle de type $y' = ay + b$.

c) L'approximation affine : notions dérivabilité et de tangente

L'approximation affine est étudiée depuis la classe de première et reprise en terminale. Elle est souvent associée à la notion de dérivabilité :

> «f est une fonction définie sur un intervalle I,. Si f est dérivable en a alors il existe une fonction φ telle que pour tout réel h, avec $a + h$ dans I : $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\ \varphi(h)$ et $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$
>
> On dit que $f(a) + hf'(a)$ est l'approximation affine de $f(a + h)$ pour h proche de 0, associée à la fonction f ». (Hyperbole 2006 p. 92)

La réciproque, qui est aussi vraie, n'est pas évoquée dans certains manuels (Hyperbole) alors qu'elle l'est dans d'autres (Déclic).

> « s'il existe un nombre réel A et une fonction φ définie au voisinage de 0 telle que : $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varphi(h)$ avec $\varphi(h) \to 0$ pour $h \to 0$, alors f est dérivable en a et $A = f'(a)$ » (Déclic 2002 p. 161)

En première S, l'équation de la tangente en un point de la courbe d'une fonction donnée est présentée comme « la meilleure approximation affine » de cette fonction à un certain voisinage. Mais parler d'approximation sous-tend la négligeabilité, notion d'après Praslon (2000, p. 99), qui est didactiquement "sous-exploitée". La quantité $h\varphi(h)$ apparaît bien dans certains manuels comme l'erreur commise dans l'approximation de $f(a + h)$ par le terme $f(a) + f'(a)h$, mais le travail sur la majoration de cette erreur ne se fait pas.

> Corrélativement, cette formule de l'approximation affine en un point pour une fonction dérivable en ce point, rigoureusement équivalente à la dérivabilité de cette fonction en ce point, n'est alors pas inspectée, mise en perspective et exploitée dans toutes ses dimensions. Par exemple, les pratiques décrites ci-dessus relèvent d'une certaine initiation, mais n'amènent encore aucune observation sur le fait que le « reste » est du type $h\varphi(h)$ au lieu de $\varphi(h)$ plus simplement. [...]
>
> Dans bien des cas, la formule « exacte » $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\varphi(h)$ *où* $\varphi(h) 0$ quand $h \to 0$, de l'approximation affine, ne constitue plus qu'une « toile de fond », son utilité pratique se dissolvant quelque peu. Le caractère « affine » de l'approximation effectuée peut même être aussi relégué à l'arrière plan ». (Praslon 2000, p. 99)

Praslon soutient son propos en faisant référence à un certain nombre d'exercices dont l'exercice 17, page 176 du manuel Déclic qui met l'accent sur « l'erreur relative » (globale) et non sur l'erreur de type $h\varphi(h)$ (locale). De plus, il fait remarquer des « glissements » dans l'utilisation de la formule « exacte » par la formule $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$; en effet, aucun discours ne suit la négligeabilité de la quantité (négligée) $h\varphi(h)$. De plus la notion de négligeabilité porte sur h « petit » ce qui fait perdre à la formule exacte, une partie de son intérêt.

> De tels « glissements », qui assimilent le terme $h\varphi(h)$ à un terme « négligeable » (mais au sens de la physique, c'est à dire « que l'on peut oublier ») ne sont pas sans risque et éloignent de toutes façons l'élève du point de vue de l'Analyse où la notion de « négligeabilité » (comme d'ailleurs l'idée de la propriété « locale ») n'a pas la même signification. (Ibid.)

En classe de terminale S, le développement limité de fonctions n'étant pas au programme, l'approximation affine, au voisinage d'un réel a, est donnée dans les manuels par la formule $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$ sans trop revenir au terme $h\varphi(h)$ (avec $\varphi(h) \to 0$ pour $h \mapsto 0$) dont résulte cette approximation.

d) Suites numériques

Les suites numériques sont introduites en classe de première et approfondies en terminale.. À l'aide de la formule de l'approximation affine, une formule discrète (suite numérique) résume les étapes itératives de la méthode d'Euler.

Nous résumons ci-après ce qui se fait dans la plupart des manuels :

Étant donnée une équation différentielle de type $y' = ay + b$ le point initial (condition initiale) A_0 $(a\ ;\ b)$. Si f est une fonction solution de cette équation différentielle alors $f(a) = b$. La construction par la méthode d'Euler, d'une suite de points (A_n) considérés comme ensemble des points proches des points de la courbe de f, impose le choix d'un pas.

Le pas h étant choisi, les abscisses sont obtenues par une suite arithmétique (x_n), de raison h et de premier terme a, définie par $x_n = a + nh$ (pour des entiers n donnés)

Les ordonnées les valeurs d'une suite (y_n) définie par la formule de récurrence suivante.

$y_{n+1} = (1 + ah)\, y_n + hb$ (pour des entiers n donnés)

La suite (y_n) est une suite géométrique si l'équation différentielle est de la forme $y' = ay$

La courbe approchée de la fonction de départ est obtenue en représentant graphiquement les points (A_n) obtenus.

IV.2.3. Statut de la méthode d'Euler : « Technique de construction graphique »

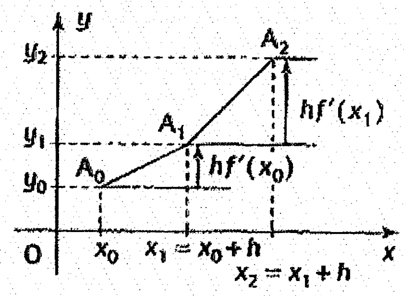
Le statut de la méthode d'Euler est lié au type de situations dans lesquelles elle apparaît, qui sont des situations de construction des courbes approchées.

Dans la plupart des manuels que nous avons analysés, l'introduction de la fonction exponentielle s'appuie sur la visualisation de sa courbe approchée à partir d'un tableur ou du papier millimétré. Ainsi, la méthode d'Euler y trouve tout son intérêt car elle offre la possibilité de construire plusieurs courbes approchées en faisant varier le pas. Souvent, aucune mention n'est faite sur la convergence de la méthode. Dans cinq des sept manuels analysés, la méthode d'Euler apparaît dans la partie "Introduction" comme une *technique de construction graphique* d'une courbe de fonction définie par $f' = f$ et $f(0) = 1$. En effet, la méthode d'Euler permet de répondre ici, au seul type de tâches relatives à la construction de courbes approchées de fonction définie par une "équation différentielle".

Les étapes de déroulement de cette technique (méthode d'Euler) sont données. Elles consistent en général, à établir une suite des points (lorsque celle-ci n'est pas déjà donnée). L'environnement informatique tableur-grapheur (ordinateur ou calculatrice) aide à trouver les valeurs numériques données par ces suites. La représentation graphique de ces points donne en principe une suite de points isolés (courbe discrète) qui ensuite, sont reliés par des segments de droites pour obtenir une courbe polygonale. C'est ce que nous résumons à travers cet encadré du manuel Déclic qui rappel le principe de la méthode d'Euler :

1 Principe de la méthode

f est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que l'on connaît seulement f' et la valeur y_0 en un point x_0 de I ($f(x_0) = y_0$ est appelée condition initiale).
On construit d'abord $A_0(x_0 ; y_0)$. On choisit ensuite un réel h, $h > 0$, voisin de zéro. (h est appelé le pas).
Par approximation affine locale, $f(x_0 + h)$ est voisin de $f(x_0) + hf'(x_0)$. On construit alors A_1 d'abscisse $x_1 = x_0 + h$ et d'ordonnée $y_1 = y_0 + hf'(x_0)$.
De même, à partir de A_1, on construit $A_2(x_2 = x_1 + h ; y_2 = y_1 + hf'(x_1))$ et ainsi de suite on construit les points $A_n(x_n ; y_n)$ tels que $x_{n+1} = x_n + h$ et $y_{n+1} = y_n + hf'(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Cette méthode s'implémente sur tableur ou sur calculatrice.



Dans d'autres cas, le principe apparaît dans les activités ou le TD comme nous pouvons l'illustrer à partir de l'exercice 2 p. 95 du manuel *Hyperbole.*

Enoncé :

Pour un entier naturel non nul n, on pose $h=\frac{1}{n}$ et on découpe l'intervalle [0 ;1] à l'aide des nombres $x_0 = 0$; $x_1 = h$; $x_2 = 2h$; ... ; $x_n = nh = 1$.

a) en considérant une approximation affine associée à la fonction exponentielle, démontrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, une valeur approchée de $\exp(x_k)$ est $(1+h)^k$.

b) A l'aide du tableur ou de la calculatrice, construire pour n = 5, n = 10 puis n = 20, un tableau de valeurs de $(1+h)^k$ pour $0 \leq k \leq n$.

c) Sur une feuille de papier millimétré, dans un repère orthogonal, tracer les représentations graphiques approchées de la fonction exponentielle sur l'intervalle [0 ;1] obtenues pour les valeurs de n de la question b).

Exercice résolu 1. p. 15, collection *Hyperbole (2006)*

L'expression "méthode d'Euler" apparaît dans le titre de cet exercice : « construire des tracés par la méthode d'Euler avec des pas différents ». Il s'agit dans cet exercice de tracer des représentations graphiques approchées de la fonction exponentielle.

Dans certaines situations, on ne mentionne pas explicitement l'utilisation de la méthode d'Euler. C'est le cas de l'activité 2 (p ; 93) dans le manuel *Fractale* dans laquelle, deux suites numériques sont déjà données.

Activité 2 : construire une fonction affine par morceau vérifiant $f' \approx f$

On va construire une fonction affine par morceaux qui est approximativement égale à sa dérivée.

Soit h un nombre fixé strictement positif, on définit les suites (u_n) et (v_n) respectivement par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + h \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} v_n = 1 \\ v_{n+1} = (1+h)\, v_n \end{cases}$$

1. Après avoir précisé la nature des suites (u_n) et (v_n), exprimer u_n et v_n *en fonction de n.*

2. On définit une fonction φ, affine par morceau, dont la courbe représentative passe par les points A_n de coordonnées $(u_n ; v_n)$.

   a. Justifier la dérivabilité de φ sur l'intervalle $]u_n ; u_{n+1}[$, puis calculer φ'(x) sur cet intervalle.

   b. En déduire les représentations graphiques de φ et de φ' sur l'intervalle $]u_n ; u_{n+1}[$.

3. On utilise un tableur pour observer la courbe de φ pour de petites valeurs de h.

   a. Programmer les suites (u_n) et (v_n) *pour h=0,5* et représenter graphiquement le nuage de points défini par les deux séries de nombres obtenues.

   b. ...

Extrait de l'activité 2. Manuel fractale, p. 93

Dans cette activité aussi, l'expression "méthode d'Euler" n'apparaît pas. Pourtant, il s'agit bien de cette méthode qui est appliquée pour la construction de la courbe approchée de la fonction φ. On ne revient pas sur la façon dont ces deux suites ont été établies. L'essentiel du travail est de parvenir à programmer les deux suites dans un tableur puis à représenter les nuages des points définis par les deux séries des nombres obtenus. À la question 3, aucune explication supplémentaire n'est donnée sur le choix de petites valeurs de h. Les deux extraits de tableaux (tableur) qui accompagnent le texte, précisent les formules à utiliser pour obtenir les valeurs de ces deux suites et montrent bien que h ne varie pas. Il s'agit des formules

=B2+$B$1 et *=B3*(1+$B$1)*

Il est rare de parler de « résolution numérique » avec la méthode d'Euler. L'accent est mis sur la courbe approchée à construire, sans doute en raison de la problématique retenue pour introduire la fonction exponentielle. Il n'y a quasiment pas de cas où les valeurs numériques obtenues sont présentées comme la solution approchée de cette résolution (numérique).

Le manuel Indice fait aussi exception dans ce cas. On retrouve des situations sur l'estimation de l'image d'une fonction.

> «... cette équation est un exemple d'équation différentielle. Ne connaissant pas l'expression de q(t), on se propose d'estimer la charge q au bout de 1,5 s dans le cas où $q(0) = 0$ »
>
> Indice, Activités 2 p. 73.

C'est d'ailleurs le seul manuel des 7 qui présente des situations et exercices où la méthode d'Euler n'est pas seulement utilisée dans le cas de la construction d'une courbe approchée de la fonction exponentielle. On y retrouve même des équations différentielles qui ne sont pas au programme comme $y' = x + y$ où la méthode d'Euler doit permettre de trouver une approximation d'une image de fonction. (*voir exercices 54, 55 p. 91).*

IV.2.4. Le rapport aux TICE

Les questions relatives à l'utilisation des environnements informatiques dans l'enseignement scientifique, ne peuvent être évoquées de façon isolée. Ils s'insèrent dans le cadre général de l'intégration des technologies de l'information et de la communication dans l'enseignement (TICE). Les recherches menées dans le domaine des TICE, traduisent les potentialités dans l'acquisition des connaissances. Cependant, elles relèvent aussi des difficultés de nature diverse dans l'appropriation de leur fonctionnalité et la mise en œuvre de certaines notions scientifiques.

L'intégration du tableur dans l'enseignement des sciences a fait l'objet de plusieurs recherches en didactique des mathématiques.

Les travaux de Dettori et *al.* (1995), Rojana & Sutherland (1997), Capponi, (2000), Arzarello et *al* (2001), essentiellement menés en algèbre et en arithmétique, ont montré le rôle potentiel du tableur et ont mis en évidence le grand intérêt de cet environnement (associé à un grapheur) pour la construction des formules, l'étude de nombreuses données numériques et la réalisation de calculs ainsi que leur représentation sous forme de tableau ou de graphique.

Les tableurs-grapheurs apparaissent dans les programmes de mathématiques à partir de la classe de quatrième et un grand intérêt leur est accordé lorsqu'on se réfère, par exemple, au texte rédigé par le groupe Mathématiques de l'Inspection Générale de l'Education nationale

> L'utilisation du tableur en mathématiques figure dans les programmes à partir de la classe de Quatrième. Ses utilisations sont multiples :
>
> - aide à l'acquisition du calcul algébrique ;
>
> - introduction de la notion de fonction et lien entre expression et fonction, entre fonction et représentation graphique ;
>
> - rangement de données en tableau(x) et représentation sous forme de courbes ou de diagrammes :
>
> dans le domaine de la statistique, le tableau permet à la fois de faire des simulations et de récupérer les données pour les analyser et les représenter. Reliés à des appareils de mesure, les ordinateurs peuvent recueillir puis analyser les données en temps réel.
>
> (MENESR[59] 2004, p. 3)

Les élèves arrivent en classe de terminale avec un rapport personnel à l'environnement tableur qui n'est pas vide. On peut alors supposer que les potentialités offertes par l'environnement tableur/grapheur dans la gestion des tableaux numériques et de la construction des courbes peuvent justifier le recours à cet outil informatique pour le traitement de la méthode d'Euler.

a) Les TICE dans le traitement de la méthode d'Euler dans les manuels

Dans six[60] manuels analysés, l'étude de la fonction exponentielle définie par $f' = f$ et $f(0) = 1$, conduit à l'utilisation d'une méthode (la méthode d'Euler) en vue de construire une suite des

[59] MENESR est l'acronyme de Ministère de l'Education Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la recherche.

MENESR (2004) *Les technologies de l'information et de la communication dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée.* Direction de l'enseignement scolaire. Inspection générale de l'éduction nationale, groupe des mathématiques.

[60] Parmi les sept manuels retenus pour notre analyse, le manuel de la collection Repère n'étudie pas les courbes approchées de la fonction exponentielle.

valeurs numériques approchées de la fonction. Un outil (le tableur ou papier millimétré) sert d'appui pour la construction des courbes approchées.

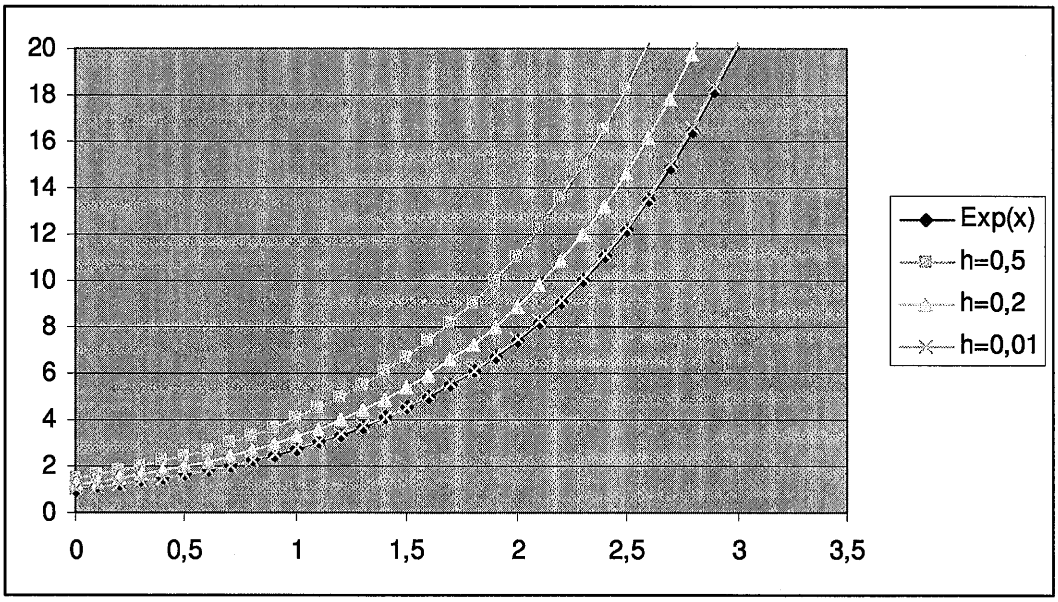
Hormis le manuel Transmath qui présente un graphique point par point discontinue (points non reliés), les cinq autres ouvrages présentent des courbes affines par morceaux.

Le recours au tableur permet d'obtenir des valeurs approchées des images d'une fonction dont on veut représenter la courbe, en faisant varier le pas de calcul. Dans les manuels, les situations étudiées utilisant la méthode d'Euler, conduisent en effet à utiliser plusieurs valeurs de pas de calcul ; ainsi plusieurs courbes sont souvent construites sur un même graphique. Le but est de montrer qu'on a une meilleure approximation lorsque le pas est plus petit. Mais il n' y a pas de commentaires sur la manière dont ce pas est choisi et sur son domaine de validité : jusqu'où peut-on aller dans la finesse ?

Dans les situations proposées, le choix du pas n'est pas à la charge de l'élève. Dans le cas de la construction d'une courbe approchée d'une fonction déjà étudiée (fonction exponentielle), on pouvait bien s'attendre à ce que soient construites dans le même graphique, des courbes approchées différentes (en fonction du pas que l'on fait varier) et la courbe théorique exacte. Cela peut être aussi un moyen de visualiser sur le graphique les effets du choix des pas par rapport à la courbe de référence (exacte). Dans le graphique ci-dessous, nous avons représenté en bleu foncé, la courbe de la fonction exponentielle (courbe théorique fournie par Excel) et des courbes approchées de l'exponentielle obtenue par la méthode d'Euler : en rose une courbe avec un $h = 0,5$, en jaune le pas est 0,2 et en bleu clair le pas est de 0,01.

		h1	h2	h3
		0,5	0,2	0,01
x	exp(x)	exp(x_0)*(h+1)		
0	1	1,5	1,2	1,01
0,1	1,10517091807565	1,657756377	1,3262051	1,11622263
0,2	1,22140275816017	1,832104137	1,46568331	1,23361679
0,3	1,34985880757600	2,024788211	1,61983057	1,3633574
0,4	1,49182469764127	2,237737046	1,79018964	1,50674294
0,5	1,64872127070013	2,473081906	1,97846552	1,66520848
0,6	1,82211880039051	2,733178201	2,18654256	1,84033999
0,7	2,01375270747048	3,020629061	2,41650325	2,03389023
0,8	2,22554092849247	3,338311393	2,67064911	2,24779634
0,9	2,45960311115695	3,689404667	2,95152373	2,48419914
1	2,71828182845905	4,077422743	3,26193819	2,74546465
1,1	3,00416602394643	4,506249036	3,60499923	3,03420768
1,2	3,32011692273655	4,980175384	3,98414031	3,35331809
1,3	3,66929666761924	5,503945001	4,403156	3,70598963
1,4	4,05519996684468	6,08279995	4,86623996	4,09575197
1,5	4,48168907033807	6,722533606	5,37802688	4,52650596
1,6	4,95303242439512	7,429548637	5,94363891	5,00256275
1,7	5,47394739172720	8,210921088	6,56873687	5,52868687
1,8	6,04964746441295	9,074471197	7,25957696	6,11014394
1,9	6,68589444227927	10,02884166	8,02307333	6,75275339
2	7,38905609893065	11,08358415	8,86686732	7,46294666

Tableau 20 : valeurs numériques de exp(x) et de ces valeurs approchées obtenues à l'aide de la formule y_{i+1} = exp(x_i)*(h+1), i ∈ [0 ; 3] avec h = 0,5 ; 0,2 ; 0,01



Graphique 3 : courbe de la fonction exponentielle et courbes approchées

L'analyse de l'utilisation de la méthode d'Euler dans l'environnement tableur/grapheur nous conduit à distinguer deux volets : le premier volet est de nature informatique et concerne la transposition des connaissances dans un environnement informatique. Le deuxième, de nature didactique, concerne la transposition didactique de la méthode d'Euler dans cet environnement.

b) Transposition informatique des connaissances

Le développement des environnements d'apprentissages informatisés accorde un intérêt particulier aux modèles de représentation des connaissances dans un système formel. Le terme de Transposition informatique est proposé par Balacheff pour désigner le processus d'adaptation de la connaissance afin de pouvoir l'exploiter et la manipuler dans un environnement d'apprentissage informatisé.

Balacheff décrit la transposition informatique comme

> « ce travail sur la connaissance qui en permet une représentation symbolique et la mise en œuvre de cette représentation dans un dispositif informatique ».
>
> Balacheff 1994

Des objets mathématiques comme les variables, les formules, les opérations, etc. sont écrits dans le langage informatique spécifique, développé pour l'environnement informatique où ils sont utilisés. Dans le cas du tableur/grapheur, ces objets ne gardent pas la même écriture que celle que nous leurs connaissons en papier/crayon. Cette question de transformation de connaissances mathématiques dans le tableur a fait l'objet d'une étude par Haspekian (2006, 2005). Dans cette étude, Haspekian a ciblé les difficultés liées à la notion de variable ; celle-ci est transformée et écrite à l'aide des symboles propres au langage de ce logiciel. Elles deviennent de nouveaux objets représentés dans des cellules.

En effet, le passage de la variable x en une écriture propre au langage du tableur, ou de la formule $f(x_0+h) \approx hf'(x_0) + f(x_0)$ en une suite de cellules remplies des nombres, implique une transformation complexe de la connaissance (modélisation) dans un registre de représentation différent, sous les contraintes de mise en œuvre par un opérateur : l'ordinateur.

Rang	Formule algébrique Représentation algébrique	Langage du tableur Représentation numérique	Ce qui apparaît à l'interface Tableau de valeurs
8	$f(x_0+h) \approx hf'(x_0) + f(x_0)$	*C8+B8*$C$5*	Nombre n_8
9	$f(x_0+h) \approx hf'(x_0) + f(x_0)$	*C9+B9*$C$5*	Nombre n_9
10	…	…	…

Tableau 21 : Transmutation des formules

Au rang 8, la formule $f(x_0+h) \approx hf'(x_0) + f(x_0)$ est une entrée saisi dans le langage du logiciel par C8+B8*$C$5. Ce qui apparaît en définitive à l'écran, c'est la valeur n_8.

Nous pouvons illustrer ce propos à partir de l'exemple ci-dessous concernant la représentation point par point, à partir de la méthode d'Euler, de la courbe d'une fonction *f*, définie par la relation $f'(x) = x$ avec la condition $f(x_0) = 0$ *et* $x_0 = 0$. Le pas *h* étant donné.

	A	B	C
1	équation différentielle : y' = x		
2			
3		x_0	0
4		$f(x_0)$	0
5		H	0,1
6			
7	n	$x = x_0+nh$	f(x)
8	0	C3	C4
9	A8+1	B8+c5	C8+B8*$C$5
10	A9+1	B9+c5	C9+B9*$C$5

La cellule argument B9 permet de trouver la formule de la cellule C9. Du statut d'objets usuels d'algèbre, la variable x et la formule $f(x_0 + h) \approx hf'(x_0) + f(x_0)$ (1) connaissent une transposition informatique dans le langage du tableur et deviennent des composantes des cellules, donc des valeurs numériques.

Dans l'exemple ci-dessous, les formules C9 et C10 sont des signifiants représentées par des nombres dans chaque cellule mais renvoient à un même référent symbolisé par l'invariant mathématique à savoir, la formule (1). Haspekian (2005) introduit la notion de « formule colonne » pour traduire la variation de la formule à chaque colonne. La formule (1) est la formule colonne représentant les valeurs obtenues dans les cellules C_i (avec $i \geq 9$).

IV. 4. Articulation discret/continu et registres sémiotiques

La construction de la notion de fonction exponentielle à partir d'une équation différentielle et de la méthode d'Euler, fait intervenir principalement trois registres sémiotiques au sens de Duval: registre de l'écriture symbolique (RS), registre numérique (RN) et le registre graphique (RG).

registre algébrique (RS): ce registre revêt deux caractères: discret et continu

Le registre symbolique à caractère « continu » (RS-C) est celui dans lequel la fonction exponentielle est définie.

> « La fonction exponentielle est la fonction dérivable *f* telle que $f' = f$ *et* $f(0) = 1$ ».
> (Hyperbole 2002)

Le registre symbolique « discret » (RS-D) est la donnée de la fonction exponentielle sous forme de suite numérique (y_k) telle que $y_k = (1 + h)^k$, suite construite à l'aide de l'approximation affine.

registre numérique (RN) se caractérise par un tableau de valeurs numériques :

La suite (y_k) permet de construire un tableau de valeurs numériques, constituant ainsi un registre de représentation.

registre graphique (RG): c'est le registre de représentation graphique des valeurs numériques obtenues dans le tableau.

La manipulation de ces différents registres en vue d'introduire la fonction exponentielle, implique souvent la convocation de deux environnements différents (papier/crayon et tableur/grapheur)

a) Passage de RS-C au RS-D : du discret au continu

Comme nous l'avons signalé plus haut, la méthode d'Euler appliquée à l'équation $y' = y$ conduit à la construction de la suite des points. On part d'un point fixe connu $A_0\ (t_0\ ;\ y_0)$ tel que $f(t_0) = y_0$.

Supposons un intervalle d'étude, par exemple $I = [a;\ b]$ avec $a = t_0$. En utilisant un pas constant $h_n = h$, le découpage de l'intervalle I en n intervalles de longueur $h = \frac{1}{n}$ (n étant un entier non nul) tel que $t_0 = a$, $t_n = b$, permet de calculer des valeurs approchées

$y_1, y_2 \dots y_n$ des points $A_1\ (t_1\ ;\ f(t_1))$, $A_2(t_2\ ;\ f(t_2)) \dots A_k\ (t_k;\ f(t_k)) \dots A_n\ (t_n\ ;f(t_n))$.

La suite (y_k) obtenue avec k entier naturel, est une suite géométrique.

En effet, l'approximation affine de $f(t_0+h)$ pour h proche de 0 associée à f donne

$$f(t_0 + h) \approx hf'(t_0) + f(t_0),$$

c'est-à-dire $f(t_0 + h) \approx (h + 1)\,f(t_0)$ car $f' = f$

En posant $f(t_0 + h) = f(t_1) = y_1$, on peut donc écrire $y_1 \approx (h+1)y_0$

Le k-ième terme s'écrit $f(t_k) = y_k$.

L'approximation affine de $f(t_k+h)$ pour h proche de 0 c'est à dire

$$f(t_k+h) \approx hf'(t_k) + f(t_k) \approx (h + 1)\,f(t_k),$$

permet de construire la suite géométrique (y_k) de raison $(1 + h)$ et premier terme 1 telle que

$$y_{k+1} = (1 + h)y_k$$

De proche en proche, on obtient la formule explicite de la suite (y_k) à savoir

$$y_k = (1+h)^k$$

On voit bien qu'on passe de la définition de la fonction exponentielle $f' = f$ *et* $f(0)= 1$ (caractère continu) à la suite géométrique (y_n) (caractère discret).

La courbe approchée de la fonction exponentielle est donnée par la construction des points $A'_k\ (t_k\ ;\ y_k)$ (proches des points $A_k\ (t_k\ ;f(t_k))$ dont le nombre (points à construire) dépend du pas h choisi, ces points étant ensuite reliés dans l'ordre par des segments.

De ce qui précède, nous remarquons que l'utilisation de la méthode d'Euler dans les manuels permet d'identifier trois niveaux (étapes) :

Niveau 1 : transformation de l'équation différentielle en une suite de points : (passage du continu au discret).

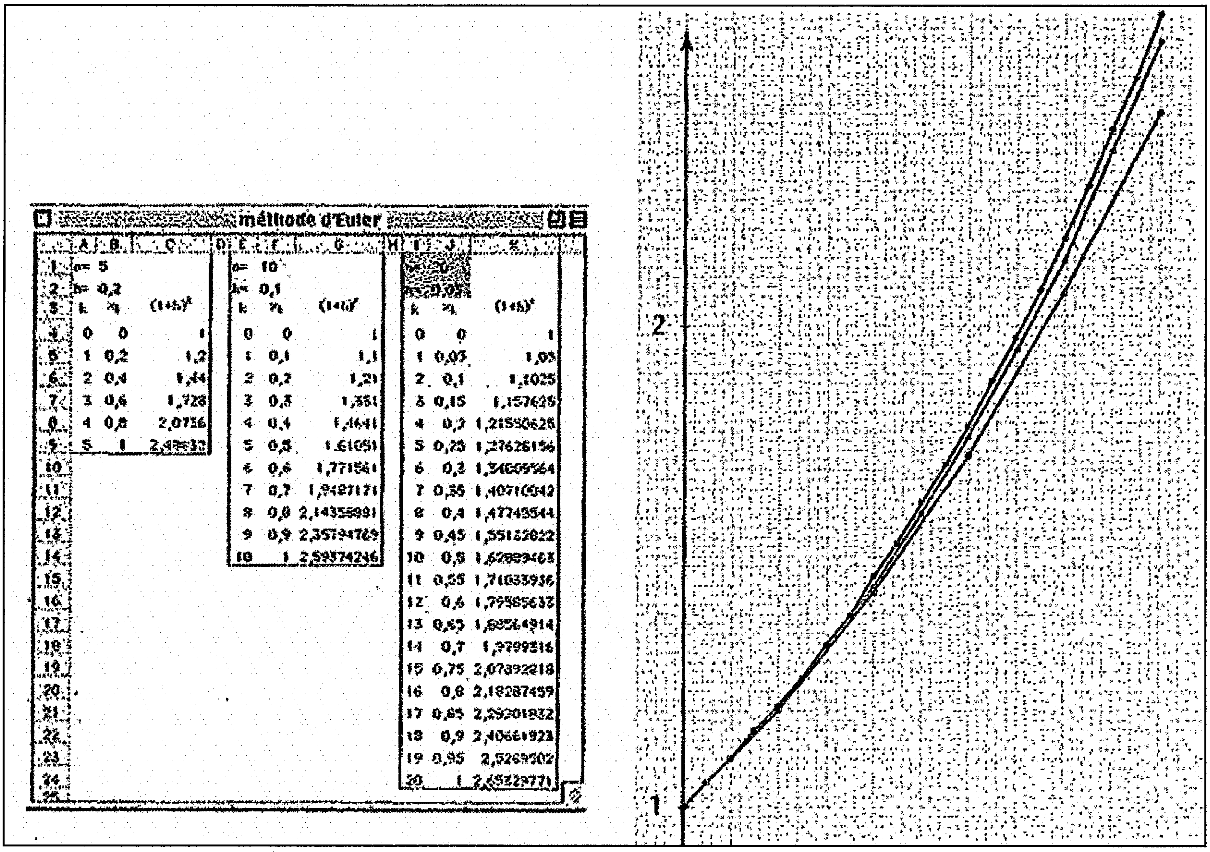
Niveau 2 : construction d'une table de valeurs numériques.

Niveau 3 : construction graphique (passage du discret au continu).

b) Changement de registres ; degré de complexité

L'exploitation de chaque niveau nécessite une gestion de changement de registre. Le passage de la fonction exponentielle à la suite numérique (niveau 1) se fait en papier/crayon à l'aide de la méthode d'Euler. Pour la construction du tableau des valeurs (obtenues à l'aide de la suite numériques), on fait a recours à un outil informatique (le tableur/grapheur) qui, non seulement permet de déterminer plusieurs valeurs pour un ou plusieurs pas de calcul (niveau 2) mais aussi de construire une ou plusieurs courbes approchées. Dans les manuels, deux types de représentations graphiques apparaissent :

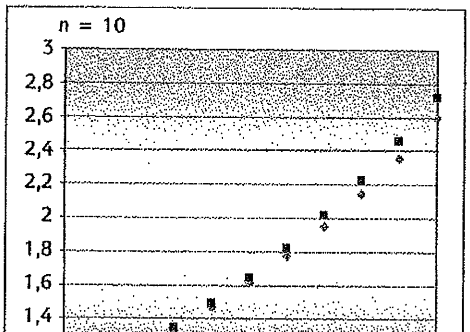
La courbe point par point continue c'est à dire celle dont les points sont reliés entre eux par des segments. C'est ce type de représentation que nous avons retrouvé dans cinq manuels analysés



Extrait du manuel Déclic

La « courbe » point par point discrète, celle dont les points ne sont pas reliés. Ce type de représentation apparaît dans un manuel (Collection Transmath).

Extrait du manuel transmath



c) Modifiez la feuille de calcul pour obtenir les valeurs pour $n = 20$, puis pour $n = 30$ et observez chaque fois la courbe obtenue. (N'oubliez pas de recopier les formules vers le bas.) Quelles remarques pouvez-vous faire ?

Hormis dans le manuel Bréal qui donne un graphique dans lequel les courbes approchées sont comparées à la courbe exacte, le travail à faire consiste à construire des courbes superposées. Ensuite, ces constructions doivent permettre de constater l'effet du pas choisi (ou du nombre de subdivision de l'intervalle d'étude) à partir de l'écart entre les différentes courbes.

La subtilité relative du "saut" du caractère discret au caractère continu de la courbe est expliquée dans le programme par une phrase : « la suite géométrique obtenue par la méthode d'Euler doit être considérée comme l'analogue continue de la fonction exponentielle ». On peut remarquer que les deux types de courbes (courbe continue affine par morceau et courbe discrète) semblent être équivalentes dans le sens où l'interprétation qui en est faite renvoie à la compréhension d'un même signifié (courbe de la fonction exponentielle). . Le tableau ci-dessous résume l'activité permettant l'introduction de la fonction exponentielle.

Environnement papier/crayon		Environnement Tableur/ grapheur	
Niveau 1		Niveau 2	Niveau 3
RSC	RSD	RTN	RG
Fonction exponentielle. $f'=f$ et $f(0)=1$ →	Suite géométrique $y_k \approx (1+h)^k$ →	Tableau de nombres ↗	« Courbe » de points isolés (discrète) ↓
y'=y et y(0)= 1 ←			Courbe polygonale (continue)

Tableau 22 : construction du concept fonction exponentielle

L'activité conduisant à la conceptualisation de la fonction exponentielle dans les programmes de terminale S, nécessite la mobilisation de plusieurs registres de représentation. En plus des changements de registres, on peut noter aussi un changement d'environnement. La conjugaison de tous ces supports tant cognitifs que sémiotiques, peut rendre cette activité complexe ; en effet, on voit apparaître simultanément les notions "fonction exponentielle", "équation différentielle" et "méthode d'Euler". À cela s'ajoute, la complexité due à la maîtrise des outils informatisés convoqués à ce niveau.

IV.5. Synthèse

L'analyse des manuels a permis de cerner l'importance accordée à la méthode d'Euler dans l'enseignement des mathématiques dans le cycle terminal. Les situations qui font apparaître cette méthode sont celles relatives à l'introduction, voire la construction du concept de fonction exponentielle (qui est son principal lieu d'apparition), en utilisant les notions d'approximation affine et de suites numériques. Ceci nous a conduit à considérer que son statut est principalement celui d'une « technique de construction de courbe approchée ». La méthode d'Euler n'est pas explicitement associée à une praxéologie relative à la résolution numérique d'une équation différentielle.

Dans ce rôle de « technique de construction de courbe approchée », l'utilisation effective de la méthode d'Euler permet le recours à d'autres outils comme le tableur/grapheur qui permet de construire dans un même graphique plusieurs courbes en faisant varier le pas. L'importance de la variation du pas est souvent notée, mais non seulement le choix du pas n'est pas à la charge de l'élève, mais il apparaît que les questions relatives à la convergence de la méthode d'Euler n'apparaissent pas. Une fois la ou les courbe(s) construite(s), il y a très de peu de retour sur l'incertitude commise.

Comme nous l'avons constaté dans les programmes et documents d'accompagnement (terminale S), les situations développées autour de la méthode d'Euler dans les manuels relèvent quasiment de l'intra-mathématique c'est-à-dire, font très peu recours à d'autres domaines scientifiques dont la physique.

V. La méthode d'Euler dans l'enseignement de physique

V.1. Programme et document d'accompagnement

Le programme

Nous présentons ci-dessus quelques points essentiels du programme (2002) relatifs à la méthode d'Euler.

<u>Introduction générale</u>

> …
>
> *S'interroger sur les paramètres qui influent sur la dérivée d'une grandeur physique, c'est chercher à établir une équation différentielle. La résoudre permet d'anticiper l'évolution d'un système. La mise en place d'une méthode numérique itérative permet de mieux ancrer l'idée du déterminisme et de la causalité : l'état d'un système à un instant donné dépend de son état aux instants antérieurs et des actions qui s'exercent sur lui.*
>
> …
>
> *En terminale, on introduit le taux de variation de la vitesse, et la formalisation des lois d'évolution peut ainsi être complète. La nouveauté réside dans la possibilité de calculer et*

prévoir l'évolution temporelle d'un système mécanique, une fois connues les forces en jeu et les conditions initiales. La méthode d'Euler pour la résolution d'une équation d'évolution du premier ordre est mise en œuvre. L'étude expérimentale du mouvement de projectiles dans le champ de pesanteur, d'objets divers dans des liquides, de systèmes oscillants mécaniques, ainsi que la connaissance du mouvement des satellites et des planètes montrent que tous ces mouvements peuvent être formalisés dans un même cadre théorique.

...

<u>Commentaires introductifs :</u>

...

- modéliser un système et utiliser les lois de la dynamique pour prévoir son comportement, en utilisant une résolution analytique et/ou une méthode numérique itérative.

...

<u>Contenus :</u>

Chute verticale avec frottement : ...'équation différentielle du mouvement; résolution par une méthode numérique itérative, régime et régime asymptotique (dit "permanent"), vitesse limite ; notion de temps caractéristique.

<u>Connaissances et savoir-faire exigibles :</u>

Partie "Chute verticale d'un solide"

Connaître le principe de la méthode d'Euler pour la résolution approchée d'une équation différentielle du mouvement.

Savoir-faire expérimentaux : Utiliser un tableur ou une calculatrice pour résoudre une équation différentielle par la méthode d'Euler.

Ces commentaires montrent l'importance accordée à la méthode d'Euler. Son rôle y apparaît clairement. Elle doit permettre la résolution numérique (approchée) d'une équation différentielle qui modélise un phénomène physique. La méthode d'Euler (son principe) fait partie des connaissances exigibles aux élèves.

La méthode d'Euler dans les documents d'accompagnement

La méthode d'Euler apparaît dans les documents suivants, soit en tant que sujet du document, soit comme méthode citée pour l'étude de tel ou tel domaine.

* Document D1 : Des lois de Newton à la cinématique

* Document D2 : A propos de l'étude expérimentale de la chute verticale d'un solide dans un fluide

* Document D5 : Comment modéliser une force de frottement ?

* Document C1 : Activités sur modèle : un exemple en électrocinétique

* Fichiers Excel : RC, bobine (RL), Exponentielle

* Document TG2 : De la simulation... dans / pour l'enseignement de la physique

* Document TG3 : A propos de la méthode d'Euler

* Document TG4 : La radioactivité : une convergence thématique entre physique, mathématiques et sciences de la vie et de la Terre

La méthode d'Euler est supposée faire partie des acquis mathématiques des élèves de terminale S en tenant compte des premières notions abordées en classe de première (en mathématiques). La proposition de découpage horaire faite par le groupe d'experts sur les programmes scolaires (GEPS) de physique-chimie (GEPS) suppose que l'enseignement des premières notions de mécanique, nécessitant la méthode d'Euler, intervient lorsque celle-ci a déjà fait l'objet d'une révision en mathématiques :

> « Les élèves ont étudié la méthode d'Euler en mathématiques en classe de première scientifique. Ils ont revu cette méthode au début de l'année de terminale lors de l'introduction de la fonction exponentielle » (CNDP 2002, p. 46)

Un exemple proposé par le GEPS dans le document d'accompagnement de physique porte sur la chute verticale d'un solide dans un fluide (en mécanique). En particulier, si la vitesse n'est pas suffisamment faible, la force de résistance exercée par le fluide est de type $f = k'v^2$. L'équation différentielle alors obtenue est de la forme $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = A - Bv^2$ où A et B sont des paramètres qui dépendent du phénomène. Ce type d'équation différentielle n'est pas au programme en mathématiques. L'application de la méthode d'Euler dans ce cas, affirme le GEPS (CNDP 2000, p. 48), prend toute sa valeur car elle permet la résolution de ce type d'équations différentielles.

Statut de la méthode : outil de validation des modèles

La situation évoquée ci-dessus s'inscrit dans un contexte expérimental. L'activité concerne la chute verticale d'un solide dans un fluide. Le but visé est la validation d'un modèle pour la force de frottement fluide : celle-ci peut être modélisée par une expression "en kv" ou "en kv^2". On considère que le modèle choisi est conforme lorsque la courbe théorique, obtenue à l'aide de la méthode d'Euler, est proche de la courbe expérimentale (c'est-à-dire celle obtenue à partir des valeurs expérimentales).

On voit là un élargissement du rôle de la méthode d'Euler si on compare à ce qui se fait dans la classe de mathématiques. La méthode doit permettre non seulement la construction de la courbe approchée, mais aussi la détermination du modèle des forces de frottement.

V.2. Analyse du rôle et de la place de la méthode d'Euler dans les manuels de physique

V.2.1. Introduction : les questions qu'on se pose

Pour cette analyse des manuels, nous reprenons ici les trois jeux de questions que nous avons présentés dans l'introduction de ce chapitre sur la place (lieu d'apparition et volume consacré), le rôle (scientifique et didactique) et le lien avec les mathématiques pour ce qui concerne l'introduction de la méthode d'Euler dans les manuels de physique de Terminale S. c'est ce que nous avons résumé dans le schéma suivant.

Manuel Terminale S, XX, coll. YY

Quelle place est attribuée à la méthode ?

- Champ d'apparition
- Type et nombre de pages
- Combien d'exercices

Comment la méthode d'Euler est-elle présentée ?:

- Mode/argument d'introduction de la méthode : historique, mathématiques, physique, informatique
- Statut de la méthode
- Explications / rigueur
- Lien avec le cours de mathématiques : présence ? nature ?
- Cohérence interne au cours de physique : définitions des grandeurs dérivées, notations
- "Valeur" attribuée à la méthode : méthode de "résolution" ou une méthode par approximation ?

Comment la méthode d'Euler est utilisée ?

- Outils utilisés
- Registres mis en œuvre
- Importance du "pas du calcul" (notamment en référence au temps caractéristique τ)

Schéma 5 de présentation des analyses de manuels

Remarques complémentaires à propos de la "cohérence interne" en physique :

La problématique de la méthode d'Euler est aussi celle du passage du continu au discret. En physique, la situation peut paraître paradoxale puisque "au départ" les données expérimentales sont discrètes et que la difficulté a été précisément de passer de taux de variations (grandeurs moyennes) à la définition de grandeurs comme dérivées (cas de la vitesse et de l'accélération en mécanique, cas de l'intensité en électrocinétique, cas de l'activité en radioactivité).

L'une des questions est donc de voir si les ouvrages de physique gèrent cette interaction et si oui, comment : quels rappels, cohérence des notations d'un chapitre à l'autre (en particulier en écho à la définition donnée pour l'accélération dans la leçon précédente), rigueur des énoncés (en particulier au niveau de l'approximation affine), etc.[61]

V.2.2. Manuel Terminale S, Hachette, coll. Hélios, 2002

a) Quelle place est attribuée à la méthode :

Le chapitre 11 du manuel de la collection Hélios traite l'étude des mouvements de chute verticale. Dans l'activité (introduction) n°2 de ce chapitre (p. 188 - 189), on présente une expérience (expérience 1) sur la chute des corps avec frottement dont le but est « d'établir et de résoudre une équation différentielle par la méthode d'Euler ». C'est là le lieu de la première apparition de la méthode d'Euler dans cet ouvrage.

Dans le cours, la relation qui exprime l'évolution de la vitesse en fonction de temps, dans le cas d'une chute verticale avec frottement, est une équation différentielle non linéaire du premier ordre lorsque les forces de frottements sont de type kv^2. La méthode d'Euler est évoquée (p. 192 et p. 193) comme méthode de résolution. Quant au principe d'utilisation de cette méthode, le texte renvoie à l'annexe 4 p. 312.

Au niveau des exercices, nous signalons que la méthode d'Euler apparaît (explicitement) dans un exercice sur les quinze que compte le chapitre. Il s'agit de l'exercice 12 (exercice à 2 étoiles) p. 199.

---

61 Notons également que l'introduction de la méthode étant associée à l'étude de mouvements (champ conceptuel), les notions de vitesse et d'accélération sont associées à des dérivées vectorielles ! Il y a (aurait) donc également une question relative à la gestion du passage des définitions vectorielles à des expressions du type dv_x/dt

À la fin du chapitre, une fiche "TP Bac" est donnée (p. 202), dont l'un des buts est de résoudre numériquement une équation différentielle à l'aide de la méthode d'Euler afin de rechercher un modèle des forces de frottement adapté à une expérience.

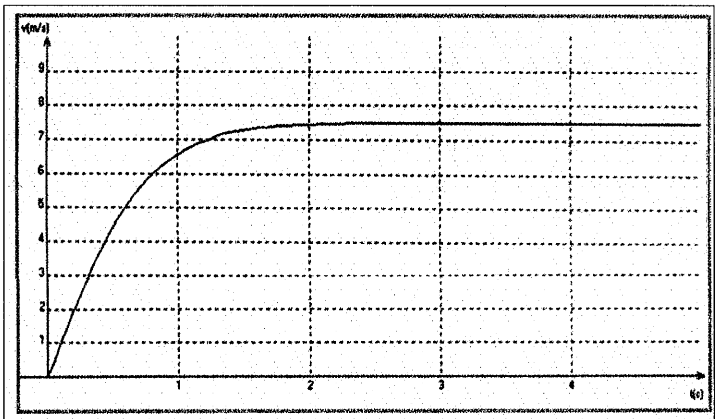
Enfin l'annexe 4 en fin d'ouvrage intitulée "comment résoudre une équation différentielle" (pp. 312-313) propose les grandes étapes de la méthode d'Euler pour résoudre une équation différentielle de type $\frac{dv}{dt} = g(1-\frac{\rho_0}{\rho}) - \frac{k}{m}v^2$

b) Comment la méthode d'Euler est présentée

Dans l'activité 2 (p. 188), une copie d'écran présentant une feuille Excel est donnée et on peut lire dans un tableau le pas du calcul exprimé en seconde (0,04) et les valeurs approchées de la vitesse obtenue par la méthode d'Euler. Le principe de la méthode n'est pas expliqué mais le texte de la fiche renvoie à l'annexe p. 312 au niveau de la question n°3 "résoudre cette équation par la méthode d'Euler?"

Dans la partie cours, on retrouve un paragraphe à propos du cas de la force en kv² qui conduit à l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} = g(1-\frac{\rho_0}{\rho}) - \frac{k}{m}v^2$

> « La résolution de l'équation différentielle du mouvement n'est pas au programme. Toutefois, pour connaître l'évolution de la vitesse au cours du temps, nous pouvons utiliser une méthode d'intégration numérique telle que la méthode d'Euler (cf. annexe). Nous obtenons la courbe du doc 14 ».



Doc. 14 *Simulation de la chute d'une goutte de pluie, de diamètre 2,5 mm, atteignant une vitesse limite ϑ_ℓ de 7,5 m . s^{-1} ; la force de frottement est de type k . ϑ^2. La vitesse limite est atteinte au bout de trois secondes de chute environ.*

Dans la fiche annexe, un petit paragraphe est consacré à l'explication de la méthode d'Euler (principe de la méthode).

1. Principe

- À une date t donnée, on suppose que la dérivée $\frac{d\vartheta}{dt}$ est constante pendant un intervalle de temps dt court. À partir de l'équation différentielle et des conditions initiales (t_0, ϑ_0), on calcule la valeur de la dérivée, puis la valeur de la vitesse ϑ_1 à la date $t_1 = t_0 + \delta t$, comme étant égale à $\vartheta_0 + \frac{d\vartheta}{dt} \cdot dt$.
- On recommence en considérant la date suivante, $t_2 = t_1 + \delta t$; les valeurs de la dérivée première et de la vitesse ϑ constituent les nouvelles conditions initiales, et ainsi de suite.

conditions initiales : (t_0, ϑ_0)

↓

calcul de $\frac{d\vartheta}{dt}$ à partir de l'équation différentielle

↓

calcul de $\vartheta 1$ à $t_1 = t_0 + \delta t$:
$\vartheta_1 = \vartheta_0 + \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \delta t$

↓

nouvelles conditions initiales : (t_1, ϑ_1)

c) Commentaire général : rigueur de présentation / cohérence interne

La deuxième partie de l'annexe donne les grandes étapes de l'utilisation de la méthode d'Euler avec Excel. Pour le rappel du principe de la méthode d'Euler, on peut regretter ici l'absence d'un graphique montrant les effets de l'approximation par rapport à la courbe exacte.

Le mode d'utilisation de la méthode d'Euler ne fait l'objet d'aucune introduction. C'est en annexe qu'est donné un document technique rappelant le principe de la méthode et les grandes étapes d'utilisation du logiciel Excel.

Dans ce document annexe, la question fondamentale de l'approximation et de la discrétisation totalement éludée ! La première phrase est auto-contradictoire (à une date donnée il y aurait un intervalle de temps !) Ensuite les auteurs utilisent l'expression « comme étant égale à » (expression un peu ambiguë) mais la relation écrite dans la marge est bien avec le signe de l'égalité stricte : $v_1 = v_0 + (dv/dt).dt$. Aucune justification ni mathématique ni en liaison avec la définition de la vitesse (vitesse dont on dit qu'elle est constante dans l'intervalle).

On note aussi le flou des notations puisque le "dt" est utilisé à la fois dans l'expression symbolique dv/dt, mais comme intervalle, avec une intrusion momentanée d'un δt non défini qui désigne (on le dit plus loin) le pas du futur calcul.

La boucle de calcul traduit un algorithme. Elle fait apparaître de "nouvelles conditions initiales" : formulation particulièrement malheureuse en physique et qui, de plus, ne correspond pas à la programmation qui est faite sous Excel (il n'y a pas de programme récursif, mais bien la recopie autant de fois que nécessaire de la relation avec incrémentation des cellules et du temps).

Pour ce qui est du rôle attribué à la méthode d'Euler, on peut remarquer que cette méthode intervient dans le cas de la résolution d'une équation différentielle non linéaire dont la résolution analytique n'est pas au programme de terminale S.

> « ... il est possible, en l'absence de solution analytique, de résoudre l'équation différentielle par la méthode d'Euler. » p. 192.
>
> « Toutefois, pour connaître l'évolution de la vitesse au cours de temps, nous pouvons utiliser une méthode d'intégration numérique (pas à pas) telle que la méthode d'Euler ». p. 193

La méthode d'Euler est qualifiée de « méthode pas à pas » sans fournir aucun commentaire qui soit de nature historique ou mathématique.

On peut aussi remarquer qu'il est indiqué à plusieurs reprises que la méthode d'Euler est utilisée pour la « résolution d'une équation différentielle » et les auteurs parlent aussi « d'intégration numérique » sans la définir. Mais la résolution d'une équation (différentielle) doit normalement conduire à la recherche de solution(s) ; or dans ce cas précis de résolution avec utilisation de la méthode d'Euler, la nature des solutions n'est pas précisée. C'est sans doute parce que la véritable finalité est la construction de la courbe approchée en utilisant Excel.

c) Comment la méthode est–elle utilisée ?

Outils informatiques

L'utilisation de la méthode d'Euler pour résoudre numériquement une équation différentielle fait intervenir les outils informatiques (il s'agit d'un tableur-grapheur).

Après avoir présenté le principe de la méthode d'Euler, l'annexe 4 donne les grandes étapes de la résolution jusqu'à la construction de la courbe. Les explications sur la manière d'insérer les données numériques, de calculer et d'écrire les formules algébriques dans Excel sont suivies de la construction de deux graphiques : l'un obtenu à partir des données expérimentales (dite courbe expérimentale) et l'autre, obtenu à partir de la méthode d'Euler (dite courbe Euler). Le choix d'utiliser ce logiciel n'est pas justifié.

Registres de représentations

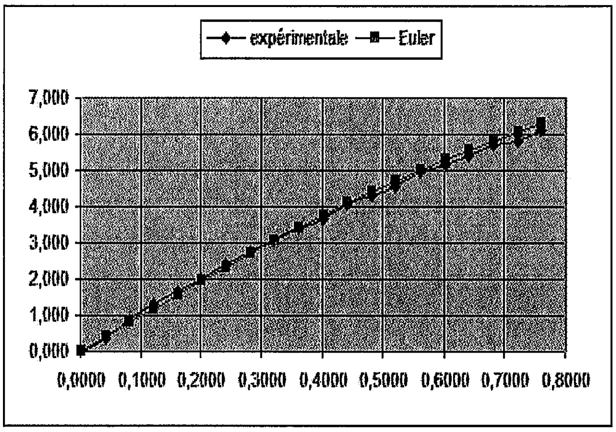
Trois types de registres sont convoqués relativement à la représentation de la vitesse d'un corps dans un fluide : symbolique (formel) $v_1 = v_0 + \frac{dv}{dt}.\delta t$, numérique (tableau de valeurs) et graphique (courbe) dans l'annexe 4, formel et graphique dans le cours, formel et numérique dans l'exercice, numérique et graphique dans l'activité introductive.

Importance du pas du calcul

Le pas de calcul est à peine évoqué dans la "fiche élève" présentant les questions à traiter relativement à l'activité 2 (pp. 188- 189) : « Résoudre cette équation par la méthode d'Euler sur un tableur en choisissant le pas de 0,04 s ». On le retrouve sur la copie d'écran (p. 188), présentant une feuille Excel, dans la dernière colonne du premier tableau sans aucun commentaire. Ce tableau est repris dans l'annexe 4 (pp. 312-313) qui est censée présenter le principe d'utilisation de la méthode d'Euler. Cependant, il n'y a pas de commentaires explicites sur le rôle du "pas" dans l'exécution de l'algorithme expliquant le principe de la méthode d'Euler. Les seuls commentaires sur le choix du pas de 0,04 s sont rattachés au dispositif expérimental donc aux résultats expérimentaux de la vitesse et non à ceux obtenus par la méthode d'Euler : « le choix du pas de 0,04 s (0,04 = 1/25) résulte de l'enregistrement du mouvement à l'aide d'un caméscope à 25 images par seconde ». p. 313

On remarque que l'activité 2 conduit à la représentation de deux courbes représentant la vitesse au cours du temps : l'une obtenue à partir des données expérimentales pour laquelle le pas de calcul n'intervient pas dans sa construction et l'autre obtenue grâce à la méthode d'Euler. Une comparaison de ces deux courbes est demandée dans la question 4.

temps (en s)	v exp m/s	dv/dt en m/s-2	v Euler m/s
0,0000	0,000	9,81	0
0,0400	0,361	9,79	0,39
0,0800	0,834	9,74	0,78
0,1200	1,307	9,66	1,17
0,1600	1,672	9,55	1,56
0,2000	2,003	9,40	1,94
0,2400	2,404	9,23	2,32
0,2800	2,735	9,03	2,69
0,3200	3,066	8,81	3,05
0,3600	3,397	8,56	3,40
0,4000	3,641	8,30	3,74
0,4400	4,042	8,02	4,08
0,4800	4,321	7,72	4,40
0,5200	4,547	7,42	4,70
0,5600	4,943	7,11	5,00
0,6000	5,135	6,79	5,29
0,6400	5,414	6,48	5,56
0,6800	5,708	6,16	5,82
0,7200	5,822	5,84	6,06
0,7600	6,123	5,53	6,30



Il semble que la courbe expérimentale joue ici le rôle de courbe de référence. En effet, on doit pouvoir critiquer le modèle de frottement choisi en ayant comme élément de référence ou de validation, le rapprochement ou l'éloignement des deux points des deux courbes. Le modèle est d'autant plus satisfaisant que la courbe obtenue par la méthode d'Euler est « proche » de la courbe expérimentale. L'exercice 12 p. 199 (le seul de cet ouvrage qui traite des équations différentielles à l'aide de la méthode d'Euler dans le but de rechercher le modèle de forces de frottement le plus adapté) va dans le sens de nos propos. Le pas de calcul étant fixé, trois modèles de forces de frottement sont donnés, il s'agit de tracer, pour chaque modèle, la courbe obtenue par Euler et la courbe expérimentale.

En l'absence de la courbe exacte, il serait intéressant –pour ne pas dire nécessaire– de comparer les deux courbes obtenues en faisant varier le pas. Ce sera dans le but de donner des éléments de réponses à la question « Observerait-on la même chose si l'on changeait le pas de calcul ? ».

V.2.3. Manuel Terminale S, Hachette, coll. Durandeau, 2002

Quelle place est attribuée à la méthode ?

La méthode d'Euler apparaît dans le cas de l'étude de la chute verticale avec frottement ; équation différentielle (chapitre 11). L'étude du mouvement dans ce chapitre conduit à une équation différentielle de type $\frac{dV}{dt} = g - r - qV^n$.

Après une brève évocation de la méthode d'Euler dans la partie « activités préparatoires », une demi-page est consacrée à cette méthode dans le cours (p. 227). De même dans la fiche TP (p. 230), la question 2 qui demande de résoudre une équation différentielle par la méthode d'Euler, renvoie à la fiche méthode (pp. 354-355) où est présenté le principe de la méthode sur Excel. Au niveau des exercices, on y compte trois (n° 14 et 15, p. 234 ; n°18 p. 235) où cette méthode apparaît.

Comment la méthode d'Euler est-elle utilisée ?

Le petit encart historique en activité préparatoire (p. 221) associé à l'exercice 14 semble présenter un argument de l'utilisation de la méthode :

> « ...Cette méthode est la réponse donnée par Euler au problème suivant :
> *soit un solide tombant dans un fluide. Les conditions initiales (vitesse et position) étant données et l'équation différentielle du mouvement étant établie, est-il possible de déterminer les vitesses et positions ultérieures dans le cas où on ne connait pas de solution analytique à l'équation différentielle* ? »

On peut comprendre par ce texte que la méthode d'Euler se substitue à une méthode analytique. C'est une méthode de résolution numérique utilisée lorsque la méthode analytique ne permet de résoudre une équation différentielle donnée. Hormis ce texte, aucune référence au cours de mathématiques n'est faite.

Pour ce qui est de l'approximation, il est simplement dit : "pour Δt petit, on peut confondre $\frac{dV}{dt}$ *et* $\frac{\Delta V}{\Delta t}$" et "à une date donnée on suppose que la dérivée est constante pendant un court intervalle de temps". Pour ce qui ce qui est de l'itération, on retrouve le même texte et le même schéma que dans l'ouvrage Hélios[62] et la même expression "nouvelles conditions initiales".

[62] La ressemblance entre les deux ouvrages sur cette partie qui traite la méthode d'Euler est sans doute le fait de l'éditeur qui est le même.

Enfin, on notera l'utilisation sans précautions d'un exposant non entier dans le modèle kv^n (n = 1,4) des forces de frottements

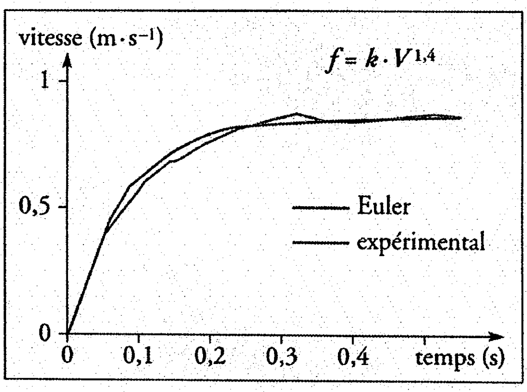
Comment la méthode d'Euler est utilisée :

Outils utilisés :

Dans le cours, l'utilisation de la méthode d'Euler a permis la construction de trois graphiques (doc. 12a, doc. 12b, doc. 12c) dont chacun représente une superposition de deux courbes (expérimentale et Euler). Cependant les outils utilisés pour mettre en œuvre cette méthode ne sont pas précisés ; en revanche, c'est un tableur dans la fiche TP qui a été utilisé, Excel dans la fiche méthode, et calculette et papier-crayon dans les exercices.

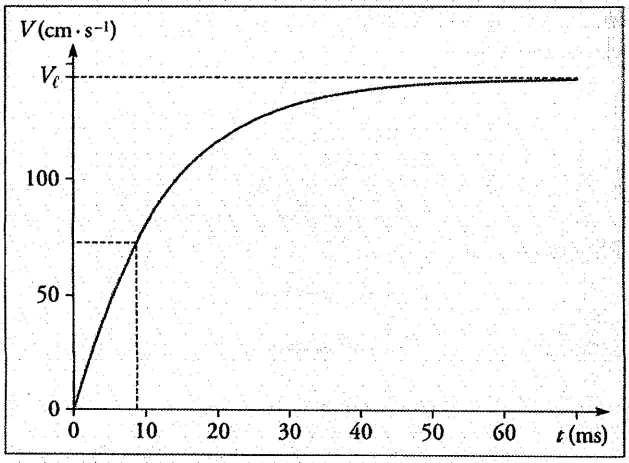
Registre de représentation

L'étude réalisée dans ce chapitre 11 sur la chute verticale dans un fluide avec frottement conduit à la représentation de la variation de la vitesse de ce corps en fonction. Cette étude permet de mettre en évidence trois registres de représentation associés à la vitesse : registres formel $V_1 = V_0 + \frac{dV}{dt}\delta t$ et numérique (dans fiche méthode et exercice), formel $\Delta V = (g - r - qV^n).\Delta t$; $V_{p+1} = V_p + \Delta V$ et graphique (dans le cours), numérique et graphique (dans la fiche TP).



On peut noter, comme dans beaucoup d'ouvrages, que les deux courbes représentées dans les documents 12a,b,c, (expérimentales obtenues à partir des points expérimentaux ou Euler obtenue à partir des points calculées par la méthode d'Euler) ne sont pas de courbes discrètes (courbes point par point) mais plutôt des tracées en traits continus.

Détail : commentaire de la figure donnée : "*ce n'est pas une variation exponentielle*" !



■ **Doc. 15** Évolution de la vitesse d'une bille d'acier de 1 cm de diamètre qui tombe dans l'eau (tracé par la méthode d'Euler). Modèle en V^2. Ce n'est pas une variation exponentielle de la vitesse avec le temps.

Importance du pas de calcul

Le pas de calcul ne fait pas l'objet d'un commentaire particulier, ni lors de la description du principe de la méthode d'Euler ni lors de la représentation graphique de la variation de la vitesse en fonction du temps. Les remarques que nous avons formulées à ce sujet dans l'ouvrage de la collection Hélios (p.243) restent vraies ici (vu la ressemblance de ces deux ouvrages sur cette partie).

V.2.4. Manuel Hatier, collection Microméga, 2002

Quelle place est attribuée à la méthode d'Euler ?

La méthode d'Euler apparaît dans le chapitre 10 (chute verticale) plus précisément lors de l'étude de la chute verticale avec frottement. Une page et demie (p217-218) est consacrée à cette méthode où le principe de son utilisation est donné. On retrouve la méthode d'Euler dans l'une des quatre activités expérimentales sur une page (p. 222). L'objectif de cette activité est « d'utiliser la méthode d'Euler pour résoudre une équation différentielle ». On la retrouve aussi dans un exercice (ex. 15 p. 227).

Comment la méthode d'Euler est-elle présentée ?

Dans le cours, l'étude du mouvement de chute verticale avec frottement se fait en trois principales étapes. Une première étape pour faire l'inventaire des forces extérieures appliquées au solide afin pour (2^{e} étape) d'établissement l'établissement de l'équation différentielle dite du « mouvement ». La méthode d'Euler apparaît à la troisième étape pour la « résolution de l'équation différentielle » obtenue : $mg - \rho_f V_g - 6\pi R \eta v_z = m\dot{v}_z$

Le principe de la méthode est rappelé :

Principe :
Supposons qu'à la date *t*, les valeurs de l'accélération $\dot{v}_Z$ et de la vitesse v_z soient connues.
A la date $t + \varepsilon$, ε étant très petit $v_z(t+ \varepsilon)= v_z(t) + \varepsilon \dot{v}_Z(t)$.
L'expression de l'équation différentielle permet ensuite d'obtenir $\dot{v}_Z$ (t+ ε).
On peut alors obtenir, de la même façon, les valeurs v_z et $\dot{v}_Z$ à t+ 2ε, à partir de celles trouvées pour t + ε ...
Si l'on connaît les valeurs de v_z et $\dot{v}_Z$ au début du mouvement, on pourra donc, pas à pas, construire la solution de l'équation différentielle.

Extrait du manuel Microméga p. 217

On remarquer qu'aucune justification ni mathématique ni historique n'est donnée concernant l'introduction et l'utilisation de la méthode d'Euler. De plus, sur le principe et la mise en œuvre de cette méthode, aucun lien explicite avec le cours de mathématiques n'est fait. On ne dit pas comment la formule $v_z\ (t + \varepsilon) = v_z\ (t) + \varepsilon \dot{v}_z(t)$ est obtenue. Mais on sait qu'en mathématiques, les élèves utilisent depuis la classe de première la formule de l'approximation affine au voisinage de a : $f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a)$ pour une fonction f dérivable en a.
Rappeler ici comment on a obtenu la formule $v_z\ (t + \varepsilon) = v_z\ (t) + \varepsilon \dot{v}_z\ (t)$ serait l'occasion, sans doute, de faire le lien avec l'autre discipline, mais surtout de justifier le signe égal « = » au lieu du signe d'approximation « ≈ ».

- Cohérence interne :

Les définitions des vecteurs vitesse et accélération sont données pp. 196-197 :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \text{ et } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Aucune explication en terme de grandeur, ni aucune correspondance de notation n'est donc donnée au moment de la présentation de la méthode d'Euler. En particulier, la notation t + ε...

- Quant au statut de la méthode d'Euler, elle est présentée comme une méthode (sous entendu parmi d'autres...) permettant de <u>résoudre</u> une équation différentielle.

Comment est-elle utilisée ?

Outils utilisés

Dans le cours, dans un premier temps la mise en œuvre de la méthode se fait à la main. On précise ensuite que le recours à un tableur « fait gagner beaucoup de temps » (p. 218). C'est un tableur (non précisé) qui est utilisé pour la partie TP (activité expérimentale 3 p. 222).

Registres utilisés :

Trois registres sont utilisés relativement à la grandeur vitesse :

formel $mg - \rho_f Vg - 6\pi R\eta v_z = m\dot{v}_z$ et numérique et graphique dans le cours, numérique et graphique en TP (pp. 217-218).

Importance du pas du calcul :

La notion de pas de calcul n'est pas évoquée dans le cours ni lors de la présentation du principe de la méthode d'Euler ni lors de sa mise en œuvre. Par contre, on TP, on retrouve un travail sur le pas sous forme de questions :

> « b/. Un tableur permet de mettre en œuvre la méthode d'Euler. Quel est le pas d'itérations choisis ? (…) e/ Peut-on choisir un pas d'itérations plus grand ? Est-il intéressant de le prendre plus grand ? ». p. 222

Pour répondre à la question b, l'élève doit lire dans le tableau pour identifier le pas d'itérations choisis. Aucune explication n'est fournie quant au choix de la valeur du pas. Il faut revenir aux activités initiales 1 et 2 pour comprendre que ce nombre est associé aux nombres d'images que l'on désire observer par seconde à travers le dispositif expérimental choisi :

> « Le fichier « avi » obtenu par acquisition de 15 vues à la cadence de 25 images par seconde est … » (activités. 1 et 2 pp. 212-213).

C'est ainsi que l'on peut comprendre le pas de 0,04 qui est apparaît dans le tableau (Doc. 1) qui représente 1/25 (cadence d'acquisition de 25 images par seconde).

Remarque : dans le cours, même si cela n'a pas été évoqué, la notation ε est choisie pour exprimer le pas d'itérations. On précise que ε "étant très petit". Cette formulation n'a pas de sens si l'on ne précise pas par rapport quel nombre il est petit. Tout nombre peut être petit ou grand par rapport à un autre nombre (100 est très petit par rapport 10^{1000}).

V.2.5. Manuel Terminale S, Bordas, coll. Galiléo, 2002

Quelle place est attribuée à la méthode

Lieu d'apparition

La méthode d'Euler apparaît en mécanique lors de l'étude de la chute verticale avec frottement fluide en *kv*. La méthode est appliquée à la résolution numérique de l'équation

$$\ddot{z} + \frac{\dot{z}}{\tau} = \alpha g$$
.

Nombre de pages et d'exercices

Dans le cours, une page est consacrée à la méthode d'Euler dont le principe est rappelé (p. 211-213). Dans les travaux dirigés une activité est donnée sur une page portant sur la chute d'une bille dans l'eau (p. 217). Enfin dans la partie exercices, on retrouve un exercice "Clepsydre et méthode d'Euler" (p. 350, exercice n°5).

Comment la méthode d'Euler est-elle présentée

- Introduction de la méthode

"*On souhaite calculer numériquement z et v...*" *avec* un portrait (peinture) d'Euler.

On souhaite calculer numériquement .... à l'aide des conditions initiales et de l'équation différentielle... A une date t_i, on note z_i la position, v_i la vitesse et a_i l'accélération. On découpe le temps en intervalles égaux Δt, $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ ... en utilisant la relation mathématique $a = \ddot{z} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ si Δt est suffisamment petit, alors on a à l'instant t_i : $a_i = \frac{v(t_i + \Delta t) - v(t_i)}{\Delta t}$ d'où $v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$ et d'où $z_{i+1} = z_i + v_i \Delta t$

Principe de la méthode d'Euler

Statut attribué à la méthode : "*la résolution analytique n'est pas toujours évidente... il arrive que seule la méthode numérique soit possible... la puissance de la méthode...* " (remarque p. 212).

Rigueur, cohérence interne

L'accélération (vecteur accélération instantanée) est définie comme $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ et l'accélération moyenne par $\vec{a}_m = \dfrac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ (p.193). On voit donc que les notations sont voisines, mais ces définitions ne sont pas ré-évoquées lors de la présentation de la méthode.

- Liens avec le cours de mathématiques

Le lien avec le cours de mathématiques apparaît avec l'utilisation de la "relation mathématique" définissant la dérivée comme limite de l'accroissement. Mais le mot "dérivée" n'est pas utilisé (on cite la "*relation mathématique*"). Par ailleurs, le passage à la suite discrète n'est pas évoqué.

Pour déterminer l'expression de cette suite ($v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$) qui permettra d'effectuer les itérations, on utilise la limite du taux d'accroissement de $v(t)$ entre les instants t et $t + \Delta t$.

La limite $a = \ddot{z} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ est qualifiée de « relation mathématique ». Si on suit la logique, pour déterminer a_i (le nombre dérivé de v en t_i), on a normalement

$a_i = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v(t_i + \Delta t)}{\Delta t}$. L'obtention de la relation $a_i = \dfrac{v(t_i + \Delta t) - v(t_i)}{\Delta t}$ avec la condition "Δt est suffisamment petit" risque de paraître incompréhensible pour un élève qui se réfère à son cours de mathématiques. On s'attendait à ce soit donnée une expression de a_i avec un signe d'approximation et non d'égalité, c'est-à-dire $a_i \approx \dfrac{v(t_i + \Delta t) - v(t_i)}{\Delta t}$. Ceci conduira à l'expression $v_{i+1} \approx v_i + a_i \Delta t$ qui est conforme à l'approximation affine utilisée en mathématique.

Le lien de la méthode d'Euler avec le cours de mathématiques apparaît simplement au niveau de l'expression de la limite du taux d'accroissement de la fonction v (vitesse). Mais les connaissances mathématiques qui sous-tendent cette méthode, notamment c'elle de l'approximation affine, n'y figurent pas.

Valeur

Les auteurs parlent toujours de résolution et ne semblent pas évoquer le caractère approximatif fondamental de la méthode. La question de l'approximation n'est abordée (mais sans citer le mot) qu'au moment de l'importance du pas du calcul ; cela est présenté comme une condition pour obtenir des « simulations numériques satisfaisantes » ou des valeurs « numériques pertinentes » (p. 212).

On peut remarquer cependant un point positif : les auteurs comparent la valeur du pas du calcul à celle du temps caractéristique τ en considérant la solution analytique de l'équation sur la vitesse $\tau\frac{dv}{dt}+v=v_{\text{lim}}$ -> $\Delta t<\tau/10$.

Comment la méthode d'Euler est utilisée

Outils utilisés

Dans le cours, l'outil utilisé n'est pas précisé, mais dans le TP et les exercices c'est le "tableur".

Remarque : une simulation avec le logiciel Dynamic[63] est présentée, mais rien concernant la méthode d'Euler (on fait d'ailleurs (re)calculer la vitesse à partir des points en reportant dans Regressi[64])

Registres mis en œuvre

Trois registres sont convoqués : symbolique et graphique (et numérique dans l'exercice).

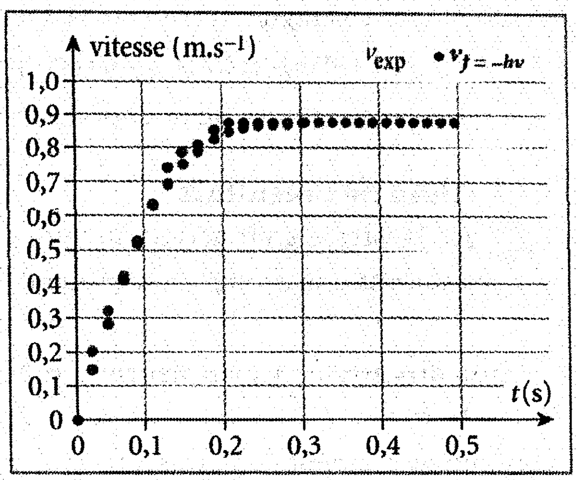


Fig. 17 Modélisation de la force de frottement par une expression en v^2.

légende

[63] Logiciel gratuit : http://www.ac-nantes.fr:8080/peda/disc/scphy/dochtml/dynacnan/dynamic.htm

[64] Logiciel d'analyse et modélisation de données expérimentales : http://www.micrelec.fr/default_m.asp; http://pagesperso-orange.fr/jean-michel.millet/telechargement.htm

Importance du pas du calcul

La question du pas de calcul est traitée à la page 212 (comparaison de différents pas et confrontation avec la solution analytique) : une erreur dans le premier graphe (v est oscillant) et surtout, les tracés ne sont pas en pointillés, ce qui masque le choix du pas du calcul !

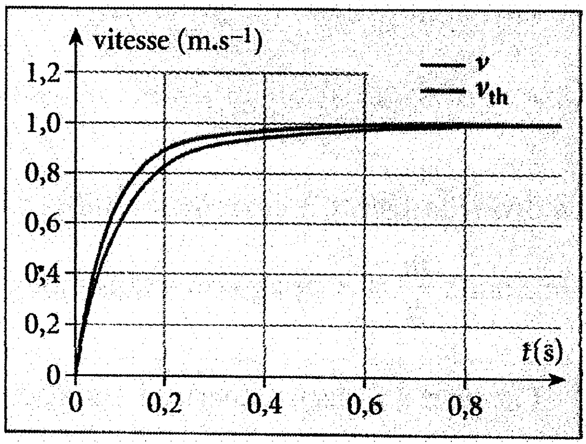


Fig. 14 Le pas de calcul Δt est égal à 0,05 s.

V.2.6. Manuel Terminale S, Nathan, coll. Tomasino, 2002

Quelle place est attribuée à la méthode

- Lieu d'apparition : chutes verticales, forces exercées par le fluide ; équation différentielle

$$\frac{dv_x}{dt} = av_x + b$$

- Comment : une activité expérimentale : en fin de chapitre p. 228, une page dans le cours (p. 223). Aucune fiche annexe.

- Exercices : 1 exercice (p. 234)

Comment la méthode d'Euler est-elle présentée

Dans le cours

§ c. Résolution de l'équation par une méthode numérique itérative : la méthode d'Euler

Plutôt que de rechercher l'expression mathématique de la fonction... on se propose de résoudre numériquement ... c'est-à-dire d'utiliser une méthode qui consiste à obtenir les valeurs approchées ... et d'en déduire la représentation graphique. On utilise la méthode d'Euler.

[...] À condition de choisir δt suffisamment petit, on peut écrire qu'on a pratiquement $av + b = \frac{\delta v}{\delta t}$, δv est la variation de la valeur de la vitesse pendant la durée δt.

Si on connaît les valeurs de a et b et les conditions initiales, on peut trouver de proche en proche les différentes valeurs au cours du temps [...]

À $t_1 = t_0 + \delta t$, la vitesse est devenue $v_1 = v_0 + \delta v_0 = v_0 + (av_0 + b)\,\delta t$ d'où, à la date t_2 la vitesse v_2 [...]

Extrait page 223

- La méthode d'Euler est introduite comme une méthode numérique itérative et graphique : la formule $v_1 = v_0 + \delta v_0 = v_0 + (av_0 + b)\,\delta t$ et l'expression de l'équation différentielle $av + b = \frac{\delta v}{\delta t}$, on peut calculer la valeur suivante et on recommence.

Quelques remarques : rigueur et lien avec les mathématiques

Dans le texte, rien n'est évoqué quant au fait que l'on passe de dv/dt à $\delta v/\delta t$. Ce passage suppose une égalité entre les deux quantités, ceci induit alors une égalité dans l'expression de v_1 et non une approximation, plus cohérente avec l'expression de l'approximation affine. Le lien avec le cours de mathématiques n'est pas fait.

On note la formulation peu scientifique "on peut écrire qu'on a pratiquement" et, ce, suivi d'une égalité stricte. De même la formulation "suffisamment petit" qui n'est concrétisée nulle part ailleurs.

De même, on peut lire dans le texte encadré dans la page précédente (qui présente la méthode d'Euler) « Plutôt que "rechercher l'expression mathématique de la fonction" ... ». Cette expression nous paraît curieuse puisque précisément le type d'équation différentielle est celui que les élèves savent résoudre. On peut signaler aussi le petit encadré "point d'histoire" disant qu'Euler est un des fondateurs de la "mécanique analytique" (!)

Cohérence interne

Le vecteur accélération est défini p. 205 : "on appelle vecteur accélération le vecteur $\vec{a}_G = \frac{\Delta\vec{v}_G}{\Delta t}$ lorsque Δt est une durée très petite. Ceci s'écrit mathématiquement : $\vec{a}_G = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_G}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_G}{dt}$";

Mais cela n'est pas évoqué au moment de la présentation de la méthode d'Euler, et on constate donc que l'introduction de la notation δ au lieu de Δ n'est pas justifiée.

Statut de la méthode

Il est bien dit qu'il s'agit d'une "une méthode qui consiste à obtenir les valeurs approchées", mais rien n'est précisé à ce sujet.

Dans la fiche TP : "résoudre une ED par une méthode numérique itérative"

Il s'agit en fait du descriptif de l'expérience avec la chute dans un liquide, puis de l'utilisation d'un tableur (copie d'écran d'un logiciel sous Mac), avec test d'influence du pas et des paramètres du système.

Comment la méthode est-elle utilisée

Outils utilisés

Aucun n'est précisé dans le cours, tableur non précisé dans la fiche TP, à la main dans l'exercice.

Registres mis en œuvre

Trois registres sont mobilisés : symbolique ($v_1 = v_0 + (av_0 + b)\delta t$), graphique, numérique (dans l'exercice).

Importance du pas de calcul

Il n'y a pas d'étude particulière du pas du calcul ; juste une remarque non justifiée selon laquelle "on peut améliorer la précision des calculs en choisissant un pas de plus en plus petit,

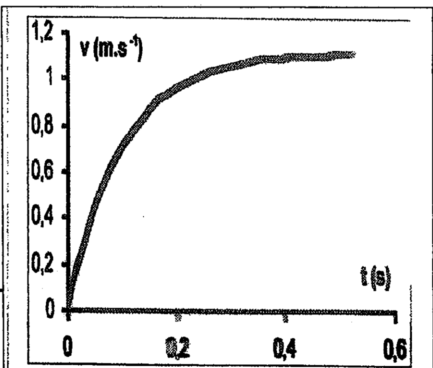


FIG. 11 Courbe obtenue à partir de la résolution numérique de l'équation différentielle

mais alors on s'impose un plus grand nombre de calculs". (Au passage on peut noter la maladresse d'expression "pas de plus en plus petit" qui laisse entendre qu'on peut diminuer le pas au cours du calcul ; ainsi que la maladresse de vocabulaire puisque ce n'est pas la précision qui est en cause (les calculs sont toujours aussi précis) mais *l'exactitude* des résultats (par rapport à la valeur "vraie")

Seule courbe donnée dans le cours :

Figure 6. Courbe obtenue par la méthode d'Euler

V.2.7. Manuel Terminale S, Bréal

Quelle place est attribuée à la méthode

- Champ d'apparition : chute avec frottements
- Type et nombre de pages

  activité : aucune

  cours : une phrase p. 254 puis confrontation théorie-expérience pp. 255-256

  annexe : fiche n°3, pp. 406-407

Comment la méthode d'Euler est-elle présentée

- Mode/argument d'introduction de la méthode

Aucun dans le cours. Il est simplement dit : "o*n utilise ensuite un tableur, par exemple Excel, pour résoudre numériquement l'équation différentielle.*"

- Statut de la méthode

Non explicité.

- Explications / rigueur

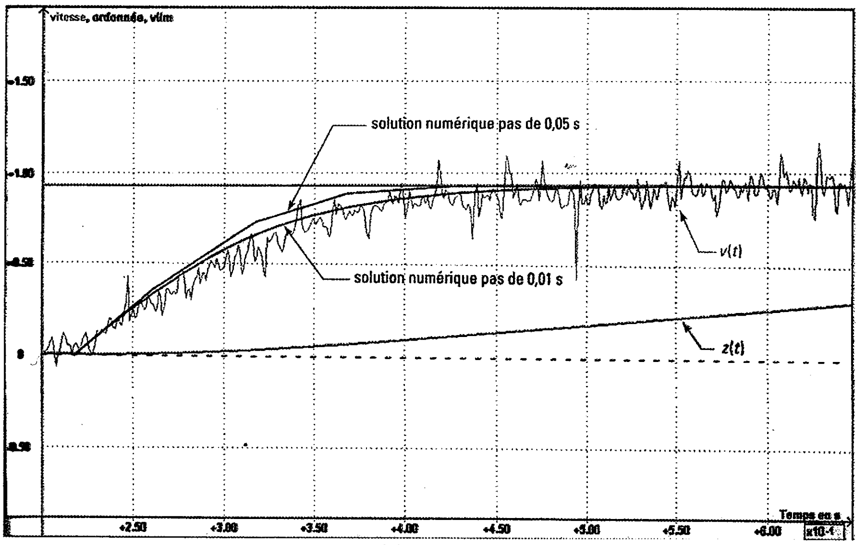
"*La méthode d'Euler consiste à utiliser une valeur approximative de la dérivée*" (p. 406). "*Au lieu d'écrire* $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$*, on utilise :* $\dot{x}(t) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx \frac{x(t_2) - x(t_1)}{\Delta t}$ *avec* $\Delta t = (t_2 - t_1)$ *petit*"

D'où : $x(t_2) \approx x(t_1) + \dot{x}(t_1)\Delta t$

à partir des conditions initiales : $x(h) \approx x(0) + \dot{x}(0)h$, $x(2h) \approx x(h) + \dot{x}(h)h$, *etc.*

L'introduction fait bien mention d'une approximation concernant la définition de la dérivée, le caractère approximatif des valeurs calculées est ensuite implicite : il est dit que *"le pas doit être choisi assez petit"*. Dans la page de cours, la première étude dans la confrontation théorie-expérience est celle du pas du calcul : mais, outre le fait que cela n'est pas à sa place, le commentaire (p. 406) est que « un mauvais choix de h peut conduire à des valeurs en contradiction avec les observations. On dit que le modèle diverge ». Il y a donc là une confusion entre les propriétés du modèle et un artefact venant d'une mauvaise "programmation " des calculs !

Enfin, la confrontation sur $v(t)$ est faite sans commentaires sur l'obtention de la courbe expérimentale très bruitée de $v(t)$ (dérivation numérique).



légende

- Lien avec le cours de mathématiques

Le mot « dérivée » est utilisé (en gras) mais le rappel de la définition de la dérivée (avec en particulier la limite quand Δt tend vers zéro) n'est pas donné. Pas d'interprétation graphique non plus. On remarquer cependant que l'expression $x(h) \approx x(0) + \dot{x}(0)h$ permettant les itérations est bien celle de l'approximative affine en 0.

- "Valeur" attribuée à la méthode

C'est systématiquement le mot "résolution" ou "résoudre" qui est utilisé, avec parfois les cas l'adverbe "numériquement".

Comment la méthode d'Euler est utilisée

Outils utilisés

Logiciel Excel

Registres mis en œuvre

Registres formel (p. 406), graphique (p. 255-256), numérique (p. 407).

Importance du "pas du calcul"

Le pas de calcul apparaît comme première étude dans la confrontation théorie-expérience ; aucune comparaison n'est faite avec le temps caractéristique τ.

V.2.8. Terminale S, Belin, Coll. Parisi, 2002

Quelle place est attribuée à la méthode

- Champ d'apparition : chute verticale dans un fluide
- Comment

  activité TP p. 148

  cours pp. 153 - 154 (en fait, une demi-page)

  fiche annexe : aucune

Comment la méthode d'Euler est-elle présentée

- Mode/argument d'introduction de la méthode

"*La méthode d'Euler donne une solution numérique approchée d'une équation différentielle. Il existe des méthodes numériques beaucoup plus performantes, mais celle d'Euler présente l'avantage d'une programmation très simple*" (fiche activité). "*La méthode d'Euler est une méthode numérique permettant de donner une solution approchée de l'équation différentielle...*".

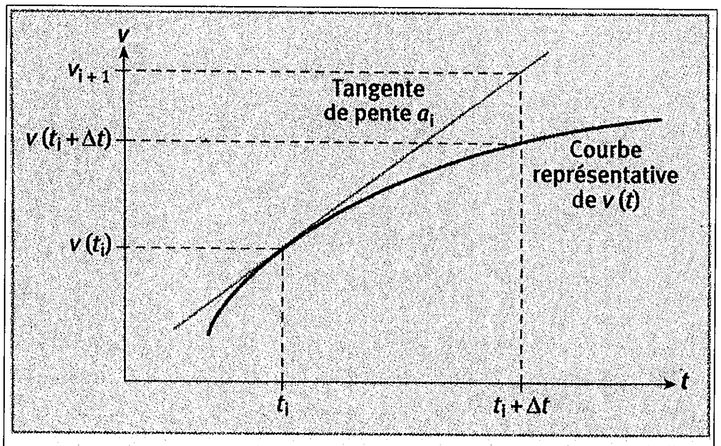
- Statut de la méthode

Voir ci-dessus.

- Explications / rigueur

"*on fait l'approximation suivante*" $v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$

une comparaison est faite (graphiquement) avec la valeur de la solution exacte $v(t_i + \Delta t)$ pour justifier que Δt soit petit (dans la fiche activité).



Doc. 4. En appliquant la méthode d'Euler, on approche la valeur de $v(t_i + \Delta t)$ par $v_{i+1} = v(t_i) + a_i\Delta t$.

On note donc le souci de visualiser l'effet de la méthode, mais là non plus, pas d'explications explicites s'appuyant sur la dérivée, le document 4 (ci-dessus) n'étant pourtant sans doute pas évident pour les élèves..

- Lien avec le cours de mathématiques

Aucun

- "Valeur" attribuée à la méthode

Méthode de "résolution numérique et approchée"

Comment la méthode d'Euler est utilisée

Outils utilisés

Calculette programmable.

Registres mis en œuvre

Registres graphique, formel et numérique.

Importance du "pas du calcul"

Point abordé (illustration p. 154 du cours) avant le choix du modèle.

V.2.9. Annales du Baccalauréat

Après l'analyse des manuels, il nous a semble intéressant d'analyser la place accordée à la méthode d'Euler dans les sujets de baccalauréat. Il s'agit de relever le nombre d'exercices portant sur cette méthode, le domaine d'apparition et le type de tâches pour lesquelles la méthode d'Euler est sollicitée. Ceci permettra de faire le lien avec l'analyse effectuée sur les manuels de physique.

Place de la méthode d'Euler dans les annales

Nous présentons dans le tableau ci-dessous le nombre d'exercices sur la méthode d'Euler recueillis dans les sujets de bac S de physique-chimie. Les résultats contenus dans le tableau concernent l'ensemble des départements de la France (Métropole, Polynésie, Antilles, etc.). Nous avons commencé notre analyse en 2003, année qui suit immédiatement la mise en pratique des programmes actuels de physique-chimie (2002). Nous nous sommes intéressés aussi au nombre d'équations différentielles du premier ordre qui apparaissent. Le but est de voir si la méthode d'Euler est utilisée dans le seul cas du traitement de situations modélisées par les équations différentielles du premier ordre ou bien au contraire, si elle est appliquée à d'autres types d'équations (d'autres types de situations de modélisation).

Année	Domaine	Nombre d'exercices	ED 1e ordre	Méthode d'Euler
2003	Dipôle RC	3	2	
	Dipôle RL			
	Radioactivité	1		
	Mécanique	1	1	1
2004	Dipôle RC			
	Dipôle RL			
	Radioactivité	1		
	Mécanique	4	4	3
2005	Dipôle RC	4	5	2
	Dipôle RL			
	Radioactivité	1		
	Mécanique	1		
2006	Dipôle RC			
	Dipôle RL			
	Radioactivité	2		
	Mécanique			
2007	Dipôle RC	1	1	1*[65]

[65] C'est une équation différentielle du second ordre qui est traitée dans cet exercice.

	Dipôle RL			
	Radioactivité			
	Mécanique			
TOTAL			13	7

Tableau 23 : Nombre d'exercices sur la méthode d'Euler

Le tableau montre que le domaine de l'électricité (dipôle RC) est celui qui apparaît le plus fréquemment (par rapport à la mécanique et la radioactivité) dans les exercices portant sur les équations différentielles du premier ordre. Cependant c'est dans les exercices de mécanique que la méthode d'Euler apparaît le plus (4 fois sur 1). D'ailleurs, l'unique fois où cette méthode est appliquée en dehors de la mécanique concerne un exercice d'électricité dont la situation étudiée est modélisée par une équation différentielle du second ordre.

S'agissant de la radioactivité, on remarque comme dans les manuels qu'il n'y a pas d'exercices sur ce domaine qui porte à la fois sur le traitement des équations différentielles du premier ordre et sur la méthode d'Euler.

Types de tâches

Comme dans les manuels scolaires de physique, la méthode d'Euler apparaît souvent dans les exercices de mécanique sur l'étude d'un phénomène (mouvement) conduisant à une équation différentielle non linéaire de type $dv/dt = B - Av^n$ où v désigne la vitesse du corps en mouvement, A et B des réels et n un entier naturel.

V.2.10. Synthèse de l'analyse des manuels de physique

Conformité au programme

Les ouvrages et les sujets du baccalauréat semblent strictement conformes à la lettre du programme, c'est-à-dire au contenu figurant dans le texte publié au BO : une place unique (la chute avec frottement). Par contre, ils ne suivent pas les indications données dans les documents d'accompagnement (attirant l'attention sur l'utilisation pour la radioactivité et les circuits électriques).

Ceci est sans aucun doute tout à fait normal : les ouvrages ont dû être conçus (mis en chantier) avant la parution des documents d'accompagnement et peut-être même avant la publication officielle au BO. De plus, les auteurs du document d'accompagnement ne sont pas exactement les mêmes que ceux du programme initial (changement dans les GEPS, intervention de la DES, du CNP...).

À propos du pas de calcul ou d'itérations

On peut s'étonner sur la manière dont la question du "pas du calcul" est mise en avant dans le traitement des situations de modélisation ; alors qu'il s'agit de tester la stabilité de la méthode d'Euler (indépendamment des mesures) la confrontation est faite avec les mesures en faisant varier le pas. Outre la confusion entre le modèle et sa discrétisation, certains ouvrages laissent ainsi entendre que l'on peut invalider le modèle parce que le pas est trop grand (on ne dit pas par rapport à quelle référence le pas est jugé grand ou petit). Outre l'absence de mise en relation/comparaison entre le pas de l'acquisition et le pas du calcul, on peut s'étonner de ce que ces considérations sur h soient indépendantes de celles sur le temps caractéristique dont on parle beaucoup par ailleurs. Manifestement, un travail didactique spécifique sur la question du pas de calcul doit être effectué.

Présentation de la méthode et lien avec les mathématiques

De façon générale, et bien qu'une certaine latitude soit laissée aux auteurs, l'introduction de la méthode d'Euler dans les ouvrages ne fait pas l'objet d'une justification et apparaît sans référence aux mathématiques. Le principe de la méthode est généralement "rappelé" (souvent en page annexe) sous forme d'algorithme et conduit à l'établissement d'une formule qui permet de réaliser les itérations.

Le lien avec le cours de mathématiques n'est pas fait non plus à propos de la notion de dérivée, parfois citée, mais souvent mal exploitée.

La mention "approchée" ou "approximative" est généralement donnée, mais sans toujours bien expliciter où est l'approximation et de quelle nature ; les relations sont données avec une égalité et le signe d'approximation et dans tous les cas, c'est le mot "résolution" qui est utilisé. Pourtant il était possible a priori de traiter cette question du point de vue formel (lien avec dérivée et approximation au premier ordre), numérique (avec comparaison à solution exacte), graphique (avec la représentation de la méthode d'Euler sur le champ de tangentes) et langage naturel (en évitant le verbe "résoudre").

Importance des outils informatiques

Le recours à un tableur pour le traitement des équations différentielles par la méthode d'Euler apparaît dans tous les ouvrages analysés. Les raisons du choix de cet outil ne sont pas explicitées dans la plupart (6 sur 7) de ces ouvrages, hormis Durandeau qui évoque « le gain de temps » comme principale raison. En effet, le logiciel possède des outils comme "recopie de la formule" qui permettent de réaliser un grand nombre de calculs en peu de temps. Il permet aussi de superposer des courbes obtenues par Euler en faisant varier le pas. Cependant, le travail de construction de courbe que permet de réaliser le logiciel se résume à remplir un tableau numérique et à afficher une courbe. Souvent les courbes obtenues (point par point ou continues) ne sont pas exploitées. On peut aussi regretter le fait qu'il n'y ait pas assez (ou pas du tout) de situations où l'on demande la construction dans un même graphique, de la courbe expérimentale et des courbes obtenues par la méthode d'Euler (avec différents pas) et la courbe théorique exacte.

Des fiches méthodes sont données (souvent en annexe) pour expliquer l'utilisation de la méthode d'Euler sur Excel. Mais on peut s'interroger sur le statut de "méthode informatique" qui risque être donné à la méthode d'Euler, occultant alors les connaissances mathématiques sur lesquelles se fondent cette méthode (dérivée, approximation affine, ...).

Ainsi, ce qui ressort des manuels sur l'utilisation des outils informatiques (tableurs) c'est une mise en évidence de l'importance de ces outils dans la rapidité des calculs et non une mise en valeur de l'articulation entre le cours de mathématiques et celui de physique[66].

VI. Synthèse de l'analyse de la méthode d'Euler en mathématiques et physique

Nous avons montré dans le chapitre V que la continuité didactique entre les mathématiques et la physique en terminale S n'est pas élémentaire et ne se fait pas sans difficultés. Les équations différentielles apparaissent comme un domaine pouvant permettre cette mise en relation disciplinaire. De plus la méthode d'Euler (avec l'utilisation des tableurs-grapheurs) a été normalement introduite pour se prêter à ce jeu des cadres de rationalité. Cependant, l'analyse des manuels que nous venons de présenter montre que la continuité didactique attendue au sujet de la méthode d'Euler, est loin d'être atteinte.

[66] On peut noter, ce qui confirme ce constat, que les nombreux articles publiés dans Le BUP (Bulletin de l'Union des professeurs de physique et chimie) sont essentiellement consacrés à la mise en œuvre informatique de la méthode d'Euler, soit sur calculette, soit sur tableur Excel.

VI.1. La méthode d'Euler en mathématiques et en physique

À propos des utilisations de la méthode d'Euler, nous avons remarqué que les auteurs de manuels scolaires de mathématiques et de physique ont suivi à la lettre les instructions des programmes respectifs et des documents d'accompagnement desdits programmes.

VI.1.1. Comparaison des programmes et manuels

Le tableau comparatif ci-dessous regroupe des éléments issus de l'analyse des programmes et des manuels.

	Mathématiques	Physique
Lieu d'apparition	fonction exponentielle dans la plupart des cas et rarement dans l'étude des équations différentielles)	Etude de la chute verticale avec frottements (souvent dans le cas des forces en kv^n)
Place	Très importante pour introduire la fonction exponentielle (activité et cours), mais quasiment nulle dans les exercices	Très importante pour le traitement numérique des équations différentielles de type : $dv/dt=A-Bv^n$
Statut	- méthode de construction de courbes approchées	- méthode numérique de résolution d'une équation différentielle et de construction graphique - outil de validation du modèle (kv^n)
Lien avec l'autre discipline	Aucun (sauf dans 1 manuel sur 7)	Aucun
outils	papier/crayon, tableur-grapheur, (rarement papier millimétré)	Tableur-grapheur (rarement papier/crayon)
Importance du pas de calcul	souvent explicitée (variation de la valeur du pas et construction dans un même graphique de courbes obtenues par la méthode d'Euler)	souvent implicite ; rarement mis en relation avec le temps caractéristique.
Connaissances mathématiques	Approximation affine, suite, dérivée, fonction exponentielle, équation différentielle du premier ordre (rarement)	dérivée (associée à la notion de vitesse ou d'accélération), équation différentielle (linéaires et) non-linéaires.

Tableau 24 comparatif sur l'analyse de la méthode d'Euler en mathématiques et en physique

VI.1.2. Statut et place de la méthode d'Euler

- Nous rappelons la place importante accordée à la méthode d'Euler dans les parties "activités" et "cours" en mathématiques. Cependant, cette méthode est quasiment absente dans l'ensemble des exercices et problèmes proposés dans les manuels. Une notion qui n'est pas traitée dans les exercices risque d'être considérée chez les élèves comme une connaissance non exigible au baccalauréat. En physique, l'importance de cette méthode est montrée dans l'étude de la chute verticale avec frottement.

- S'agissant du lien entre le cours de mathématiques et de physique autour de la méthode d'Euler, nous avons constaté que l'introduction de la méthode d'Euler en physique (principe) et sa mise en œuvre ne s'appuient pas sur le cours de mathématiques qui met essentiellement en avant la notion d'approximation affine. Aussi, la présentation du principe de cette méthode dans les deux disciplines en fait ressortir le caractère algorithmique. Mais dans les faits, en physique on donne (dans la plupart des cas) la formule qui doit permettre de réaliser les itérations alors qu'on pourrait la laisser à la charge de l'élève qui sera obligé d'utiliser ses connaissances sur l'approximation affine vue en mathématiques.

- S'agissant du statut de la méthode d'Euler, cette méthode est introduite en mathématiques pour permettre la construction de courbes approchées de l'exponentielle. En physique, cette méthode revêt deux statuts : méthode de résolution numérique d'une équation différentielle et outil de validation de modèle (des frottements). Les manuels essaient de justifier le recours à la résolution numérique par l'insuffisance des méthodes analytiques (elles ne permettent pas de résoudre certains types d'équations différentielles). À ce sujet, on peut constater un écart sur le vocabulaire : on ne parle de "résolution numérique ..." qu'en physique et presque jamais en mathématiques.

On peut résumer en disant que la méthode d'Euler en mathématiques appartient à un champ théorique (par nature) tandis qu'en physique, la méthode d'Euler est située dans le champ expérimental (donc en porte-à-faux).

À ce niveau de l'analyse, on est amené à constater que ces enseignements, non seulement s'ignorent, mais conduisent à l'impression qu'il y a deux méthodes d'Euler différentes ! On s'interroge alors sur la tâche de mise en relation implicitement dévolue à l'élève.

VI.2. Retour sur les dialectiques

VI.2.1. La prise en compte de la dialectique discret/continu

Par ailleurs, on remarque aussi que la méthode d'Euler permet de construire des courbes présentées sous deux aspects différents : courbe continue (polygonale) et « courbe » discrète (point par point). Nous avons ainsi été conduits à nous intéresser à la prise en compte ou non, de la dialectique "discret/continu" dans les manuels.

En mathématiques, la discrétisation de la fonction exponentielle $f' = f$ avec $f(0) = 1$ par la méthode d'Euler conduit à la construction d'une suite numérique géométrique $y_k = (1 + 1/n)^k$. D'après les commentaires du programme de mathématiques, ce travail de discrétisation conduit à appréhender la fonction exponentielle (dont l'expression algébrique n'est pas encore définie) comme l'analogue continue de la suite géométrique (y_k).

En physique, relativement à l'étude de la méthode d'Euler, les données expérimentales (qui sont discrètes) sont traitées à l'aide d'un dispositif associé à un ordinateur. Dans les manuels, les graphiques obtenus présentent souvent des courbes continues. Aucune explication n'est fournie quant au passage de discret au continu. Par ailleurs, ces courbes expérimentales sont comparées avec les courbes obtenues par la méthode d'Euler (continue). Cette dialectique discret/continu est alors purement et simplement ignorée.

VI.2.2. Prise en compte de la dialectique approché/exact

S'agissant de la dialectique "approché/exact", la plupart des manuels de mathématiques s'efforcent à montrer le caractère approximatif de la courbe obtenue par Euler en faisant varier le pas. Mais la comparaison se fait entre courbes approchées et non avec la courbe exacte. L'hypothèse qui sous tend cette démarche est que l'« on obtient une meilleure approximation en choisissant un pas de plus en plus petit ». Les questions sur l'erreur commise ne sont pas traitées.

En physique, cette dialectique approché/exact, non plus, n'est pas mise en valeur. Nous avons souligné plus haut que l'étude de la chute verticale dans un fluide conduit à comparer la courbe expérimentale et la courbe théorique obtenue par la méthode d'Euler. Mais cette comparaison interroge sur la nature épistémologique de la validation. C'est une démarche inverse que l'on observe ici par rapport à ce qui se fait souvent en sciences. Les deux types de courbes obtenus sont de nature approchée, et l'une sert de référence à l'autre. C'est une dialectique "approché/approché" qui apparaît ici. La question qui se pose ici est : quel degré de confiance peut-on accorder aux données expérimentales pour que celles-ci valident un modèle (qui relève de la théorie) ?

Partie 3

CHAPITRE VII :
LA RÉALITÉE DE L'ENSEIGNEMENT DES ÉQUATIONS DIFFÉERENTIELLES DANS LES CLASSES :
ENQUÊTES, ENTRETIENS ET OBSERVATION DES CLASSES

I. Introduction

Dans le chapitre IV nous avons analysé la manière dont la continuité didactique se concrétise dans ces manuels. Nous y avons relevé, la diversité des activités de modélisation qui ont été choisies pour faire vivre cette continuité didactique mais aussi, les difficultés (de natures diverses) quant à la mise en œuvre de cette continuité : les situations de modélisations (issues de la physique par exemple) sont souvent peu ou sous-exploitées en mathématiques tandis qu'en physique, les activités et techniques ignorent les connaissances mathématiques. Plus particulièrement, la méthode d'Euler censée établir un pont entre les deux disciplines, n'apparaît essentiellement qu'en physique et ce uniquement du point de vue de la programmation du calcul sur ordinateur ou calculette. Comme nous l'avons indiqué en conclusion du chapitre précédent, une telle séparation des disciplines est liée aux conditions de conception et publication des ouvrages, en particulier lors des premières éditions de nouveaux programmes.

La continuité didactique attendue, était donc à rechercher au niveau du terrain, c'est-à-dire auprès des enseignants eux-mêmes qui doivent mettre en application les programmes.

Nous nous sommes donc intéressés à la réalité des classes dans la mise en œuvre de cette continuité didactique. Nous présentons ici le travail de première approche, dans lequel nous avons choisi de croiser le point de vue des enseignants de mathématiques et de physique) à propos de cette pratique pédagogique nouvelle et de la nature des rapports qui se développent entre avec les collègues de l'autre discipline. Un questionnaire a été proposé à des enseignants des deux disciplines et qui a été suivi de quelques entretiens semi-directifs. Quelques observations de classe nous ont permis de mieux cerner la réalité de l'enseignement notamment à propos de la méthode d'Euler.

II. Nécessité d'une enquête au près des enseignants

Il nous a semblé intéressant de recueillir le point de vue des enseignants de mathématiques et de physique sur la synergie entre les deux disciplines. C'est dans ce sens que nous avons mis en place un questionnaire adressé aux enseignants de mathématiques et de physique. Il vise à connaître comment est perçue, par les enseignants eux-mêmes, la place des équations différentielles. Il s'agit d'une part, d'analyser la manière dont les intentions didactiques véhiculées dans les programmes sont perçues par les enseignants et, d'autre part d'appréhender les difficultés réelles ressenties par eux dans l'exécution du programme.
Ce questionnaire s'organise autour des questions portant sur :

l'organisation et la gestion par les enseignants des orientations du programme.

ce qui, pour les enseignants, permet d'assurer la continuité didactique (s'ils l'assurent vraiment)

l'intérêt d'un enseignement des équations différentielles au secondaire

l'exploitation des TICE pour le traitement des équations différentielles

la place de la méthode d'Euler

II.1. Présentation générale du questionnaire

II.1.1. Mode de diffusion

Ce questionnaire, élaboré au cours de l'année scolaire 2004-2005, a été présenté aux enseignants des lycées des classes de terminales scientifiques de la région parisienne et de la région grenobloise. Aussi, deux sites Web ont permis la diffusion de ce questionnaire : le site de l'Association des Professeurs des Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP) et le site de l'équipe DidaScO de l'Université Paris Sud.
Nous avons reçu 100 réponses, soit 50 en mathématiques (dont 15 obtenues par courrier électronique) et 50 en physique (dont 35 par courrier électronique). Notre souhait était au départ de travailler sur un échantillon plus grand que celui-ci. Il est vrai qu'un échantillon de 100 enseignants ne peut être représentatif d'une population du corps enseignants des deux disciplines. Le faible taux de réponse est un phénomène bien connu, mais s'agissant d'une

première approche à visée qualitative et exploratoire, nous avons tenté d'appréhender ainsi la diversité des points de vue des enseignants sur l'enseignement des équations différentielles. Nous avons donc été conduits à plus de prudence dans l'analyse et l'interprétation des résultats issus de notre enquête.

II.1.2. Justificatif des choix des questions (analyse *a priori*)

a) L'organisation et la gestion des orientations des programmes

Nous avons montré dans le chapitre III sur l'analyse des programmes que l'évolution sensible de l'enseignement des équations différentielles à travers les programmes depuis les réformes de 1960 peut se subdiviser en quatre périodes :

de 1960 à 1970

de 1970 à 1980

de 1980 à 1998

de 1998 à nos jours

Question 1: *Indiquez la (les) périodes au cours de(s)- laquelle(s) vous avez enseigné en terminale scientifique ?*

Cette question permet de situer l'ancienneté des professeurs et de distinguer ceux qui ont connu, en tant qu'enseignants, les "anciens programmes" (programmes publiés entre 1960 à 1998) et ceux qui n'ont connu que les "nouveaux programmes" (mis en œuvre à partir de 2002).

Ce paramètre peut avoir en effet une importance dans l'acceptation des nouveautés, aussi bien au niveau des démarches (cas de l'introduction de l'exponentielle comme solution d'une équation différentielle en mathématiques) qu'au niveau des contenus eux-mêmes (en particulier pour la méthode d'Euler en physique), les pratiques des enseignants pouvant se « stabiliser » très tôt. Ceci rejoint les résultats d'une recherche menée par Agnès Lenfant (2002) au cours de sa thèse où elle montre que les pratiques des enseignants ont tendance à se stabiliser dès les années de formation, ce qui renforce la pertinence de la question.

Question 2 : *À quel(s) moment(s) de l'année traitez-vous actuellement les équations différentielles ? Quelles sont vos raisons (institutionnelles, organisation personnelle, cohérence avec d'autres enseignements, ...)*

Le programme est la référence de base pour l'enseignant car il précise ce que l'enseignant est tenu de faire. Mais, la planification temporelle des enseignements peut changer d'un enseignant à un autre. Cela est d'autant plus complexe pour les enseignants des mathématiques qui devraient tenir compte des orientations du programme qui demande de traiter les équations différentielles avec les enseignants des sciences physiques.

Conformément aux programmes des mathématiques, les équations différentielles doivent être traitées tout au long de l'année. Ainsi la répartition suivante peut être envisagée par les enseignants des mathématiques : dans un premier temps, il s'agit d'introduire la notion d'équation différentielle pendant l'étude de la fonction exponentielle ; le deuxième temps concerne l'étude de l'objet "équation différentielle" en s'appuyant sur certaines propriétés de la fonction exponentielle.

Les équations différentielles apparaissent tôt au début de l'année dans le cours de physique et sont présentes dans de nombreux chapitres répartis le long de l'année. Ainsi, les auteurs du programme de mathématiques émettent le souhait que ces équations soient abordées en mathématiques dès le premier mois et ce, en collaboration avec le professeur de physique.

La réponse à cette question permet de repérer les enseignants qui suivent l'ordre établi par le programme ou au contraire planifient eux-mêmes une progression soit pour rechercher une cohérence avec d'autres enseignements, soit par rapport à leur vécu d'ancien élève ou de d' « ancien » professeur. On peut aussi y repérer la mention d'une éventuelle concertation avec l'enseignant de l'autre discipline, suggérée dans l'énoncé de la question.

b) Place de la méthode d'Euler

Question 3 : *Combien de temps (en heures) consacrez-vous à la méthode d'Euler ?*

La méthode d'Euler est un procédé mathématique qui permet d'approcher certaines fonctions sans que celles – ci ne soient nécessairement données de façon explicite. L'introduction de cette méthode dans les programmes des mathématiques et de physique est une nouveauté. On peut redouter la résistance que peut susciter cette innovation chez certains professeurs qui doivent concilier des connaissances disciplinaires et "informatiques".

En physique, le traitement numérique des équations différentielles par la méthode d'Euler permet de visualiser des courbes approchées, solutions d'équations différentielles. Ceci est une alternative possible au traitement algébrique. E et permet d'étudier d'autres types d'équations différentielles (non linéaires) qui ne sont pas au programme de mathématiques.
Nous avons estimé que le temps que les enseignants y passent peut être un indicateur pour juger de l'importance accordée à cette méthode, notamment dans la relation entre mathématiques et physique.

c) Perception de l'interaction mathématiques-physique

Nous avons regroupé trois questions dans cette partie.

Question 4 : *Pensez-vous qu'il est préférable d'aborder les équations différentielles en cours de mathématiques avant leur utilisation en physique, ou bien l'inverse ?*

L'actuel programme des mathématiques mentionne que les enseignants de mathématiques doivent traiter les équations différentielles en relation avec l'enseignement de la physique. Nous avons été amenés à interroger les enseignants pour savoir s'ils mettent ce choix en pratique.
D'autre part, on peut ici avoir un point de vue sur la représentation du lien mathématiques-physique chez les professeurs :

les mathématiques constituent une discipline de service pour les autres sciences,

c'est un outil pour la physique,

la physique est une illustration de la puissance des mathématiques,

les mathématiques sont constitutives de la physique

etc.

Ces points de vue peuvent apparaître aussi bien chez les professeurs de mathématiques que chez ceux de la physique mais selon un point de vue nécessairement différent : il est donc probable que les réponses des enseignants dépendent de la discipline.

<u>Chez les professeurs des mathématiques</u>

Les objets conceptuels manipulés dans les deux disciplines sont différents et peuvent être source de difficultés multiples chez les élèves.
Par exemple l'objet « différentielle » ne joue pas le même rôle en mathématiques et en physique. Il ne prend du sens que dans certaines situations complexes en mathématiques alors

qu'il est d'une utilisation fréquente dans des contextes très divers en sciences physiques (calcul d'erreur, calcul approché, ...).

Pour cette question, nous attendons trois types de réponses chez les enseignants de mathématiques.

Personne ne peut mieux enseigner les savoirs mathématiques que le professeur des mathématiques. Il est donc préférable et normal que l'enseignement des équations différentielles soit abordé d'abord en mathématiques (prédominance des mathématiques). Nous qualifions de "matheux" les enseignants dont les réponses rejoignent ce point de vue.

L'enseignement des équations différentielles doit être simultané en mathématiques et en physique (enseignement co-animé par les enseignants des deux disciplines ou enseignement plus ou moins alterné). Prise en compte de la progression définie par le programme et nécessité d'enseigner les équations différentielles « car elles sont utiles en physique ». Nous qualifions les enseignants de cette catégorie de "matheux-physiciens".

L'enseignement sur les équations différentielles doit se faire indépendamment dans chaque discipline. Les situations modélisées, le symbolisme et les méthodes sont spécifiques de chaque discipline. Dans cette catégorie, on peut bien retrouver les "matheux" et les "matheux-physiciens ».

On peut donc préjuger qu'aucun professeur de mathématiques ne proposera de commencer l'enseignement des équations différentielles en physique.

<u>Chez les enseignants de physique</u>

Nous nous attendons à voir aussi apparaître chez les enseignants de physique, trois catégories de réponses :

Le traitement des équations différentielles en physique ne consiste quasiment pas à les résoudre. Il importe peu que cette notion ait été étudiée en mathématiques avant. Nous qualifions alors de "physiciens" les enseignants qui partagent ce point de vue.

L'enseignement doit être fait en coordination avec le collègue des mathématiques. Nous pensons que c'est dans cette catégorie d'enseignants (qui partagent ce point de vue) que nous trouvons plus de personnes (par rapport à ceux appartenant à d'autres catégories citées) favorables à un travail conjoint entre les spécialistes des deux disciplines. Nous qualifions ces enseignants de "physiciens-matheux".

L'étude des équations différentielles doit commencer en mathématiques. Le cours de mathématiques est censé fournir à l'élève les éléments nécessaires pour la compréhension de leur utilisation en physique (fonction "outil").

Question 5 : *Travaillez-vous, sur ce thème, conjointement avec les collègues de mathématiques ?*

Cette fois on pose la question directement. Les réponses doivent nous permettre d'estimer comment l'incitation à un travail "collaboratif" sur l'enseignement des équations différentielles est suivie par les enseignants dans la pratique des classes.

d) L'importance d'un enseignement des équations différentielles au secondaire

Question 6: *Quelle est selon vous l'importance d'un enseignement portant sur les équations différentielles dans une formation scientifique générale du secondaire ?*

Sur cette question, nous attendons une diversité de réponses.

Pour les *enseignants des mathématiques,* des réponses affirmant l'importance de ce thème peuvent s'inscrire dans quatre types de justification :

- l'enseignement des équations différentielles est destiné à introduire ou à donner du sens aux fonctions usuelles comme les fonctions exponentielle, logarithme et circulaires.

- l'étude des équations différentielles en classe de terminale est une façon de préparer les élèves à une étude plus complexe qui sera envisagée à partir de la première année d'enseignement supérieur

C'est - c'est une notion importante des mathématiques. Il ne serait pas admissible qu'un élève de série scientifique, en fin de cycle (secondaire) ne connaisse pas l'existence des équations différentielles.

- les équations différentielles constituent un outil pour les sciences physiques et les sciences expérimentales.

Pour les enseignants de physique, des réponses affirmant l'importance de ce thème peuvent s'inscrire dans quatre types de justifications :

- les équations différentielles sont la première étape de la modélisation de l'évolution des systèmes physiques.

- Il est important que les élèves aient vu des exemples de différentes équations différentielles pour les préparer à aux thèmes plus complexes qu'ils rencontreront à partir de la première année d'enseignement supérieur.

- C'est une notion importante en physique. Il ne serait pas admissible qu'un élève de série scientifique, en fin de cycle (secondaire) ne connaisse pas l'existence des équations différentielles.

- Les équations différentielles constituent un outil pour les sciences physiques et les sciences expérimentales.

e) L'enseignement des équations différentielles et les nouvelles technologies de l'information et de la communication.

Les questions regroupées dans cette catégorie sont relatives à l'usage des nouvelles technologies pour l'enseignement des équations différentielles.

L'enseignant d'aujourd'hui, face aux nouvelles technologies de l'information, doit assumer d'autres fonctions que celles qui lui étaient conférées par les anciens programmes. Nombre d'enseignants n'ont pas appris, lors de leur formation initiale, à étudier les équations différentielles avec des outils informatiques. Pourtant, de plus en plus, les programmes et manuels scolaires intègrent l'usage des nouvelles technologies dans l'enseignement comme étant une autre façon de faire les sciences. En mathématiques comme en physique, des séquences de visualisation des courbes solutions d'une équation différentielle grâce à l'ordinateur sont prévues. Il est évident et à prévoir que les enseignants qui sont en marge de l'avancé technologique que nous connaissons actuellement connaîtront des difficultés énormes pour les intégrer. Pour cela, on peut se référer à quelques travaux didactiques sur l'intégration des TICE qui ont montrés les potentialités mais aussi les difficultés, de l'utilisation des outils informatiques. On peut citer par exemple les travaux de recherche menés au sein de l'équipe DIDIREM de l'université Paris 7 sur l'intégration du logiciel DERIVE à l'enseignement des mathématiques (Abboud & al 1995) ou sur l'intégration des calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée (Artigue & al.

1998). D'autres travaux ont conduit à une soutenance de thèse (Ozdemir 2006, Kalistan 2006, Haspekian 2005, ...).

Chez les enseignants, les difficultés viennent parfois de la familiarité ou non des outils informatiques. Haspekian parle dans ce cas d'enseignant expert ou non.

> « Un enseignant, non expert[67] de l'outil, peut pressentir une complexité ajoutée. L'organisation de ce jeu entre environnements, soit d'une gestion des genèses instrumentales, est un travail :
> - nouveau,
> - supplémentaire,
> - et que l'on peut supposer difficile »
>
> (Haspékian 2005)

D'autres travaux, abordant dans le même sens qu'en mathématiques, sont de plus en plus nombreux en physique. Ces études concernant à la fois la place des TICE dans l'enseignement des sciences, leur efficacité mais aussi des difficultés dans la pratique des classes (Beaufils & Salamé 1989, Beaufils 2005, Winther 1992, etc...)

Question 7 : *Utilisez-vous des moyens informatiques lorsque vous traitez des équations différentielles?*

Cette question nous permet d'estimer le taux d'utilisation de moyens informatiques (ordinateur ou calculatrice) et quelles sont les raisons d'utiliser tel moyen plutôt que tel autre.

Question 8 : *Les moyens informatisés permettent a priori une nouvelle approche et/ou un nouveau regard sur les équations différentielles. Pensez-vous que ceci constitue plutôt une aide ou plutôt une difficulté supplémentaire : pour l'enseignant / pour l'élève*

Les avis sont souvent partagés quant à "l'intérêt" des TICE. Parmi les points de divergence, celui de savoir si l'introduction de ce média supplémentaire constitue effectivement une aide comme cela est présenté, ou au contraire ajoute une difficulté supplémentaire (matérielle ou conceptuelle). L'ajout de la mention "pour l'enseignant/pour l'élève" vise à rappeler qu'il y a deux points de vue, et à voir éventuellement celui qui est privilégié dans la réponse (réponse centrée sur l'élève ou sur l'enseignant).

Question 9 : *L'introduction des approches informatisées vous paraît-elle pertinente / légitime sur le plan scientifique ?*

[67] La recherche menée par Haskepian concerne l'intégration du tableur dans l'enseignant des mathématiques. L'auteur qualifie « d'enseignant expert » celui qui a un usage courant ou privilégié avec le tableur.

Nous avons enfin interrogé les enseignants sur la pertinence scientifique de ces moyens informatisés.

Cette question vient en écho à la question 6 et vise à faire s'exprimer les enseignants sur la pertinence au regard de pratiques scientifiques actuelles. La réponse attendue pour les enseignants de physique est celle citant l'omniprésence actuelle de l'informatique dans les laboratoires de recherche ou de développement et qu'à ce titre, il s'agit d'une transposition légitime. On peut toutefois imaginer une réponse négative mettant l'accent sur d'autres références jugées préférables (référence à l'histoire des sciences) ou sur l'inadéquation des outils modernes et des connaissances "anciennes" enseignées (est-il légitime d'utiliser un ordinateur pour étudier la chute "galiléenne" ?)

En mathématiques, la question est voisine mais sans doute plus "tendue" : l'utilisation de l'informatique dans la recherche en mathématiques n'est sans doute pas aussi "bien vue" (au propre comme au figuré).

II.2. Analyse des réponses du questionnaire

Nous avons reçu 100 réponses, soit 50 en mathématiques et 50 en physique. Le faible taux de réponses est un phénomène bien connu ; mais s'agissant d'une première approche à visée qualitative et exploratoire, les réponses recueillies (même si elles sont plus ou moins précises par rapport à la réalité) nous donnent une image de l'importance intellectuellement accordée aux équations différentielles.

Mais ceci doit conduire à plus de prudence dans l'analyse et l'interprétation des réponses, même si la plupart correspondent à l'image qu'on se fait de la situation.

Les citations des enseignants interrogés figurent en italique[68] et à la place des prénoms nous avons utilisés des pseudos que nous avons choisis pour garantir l'anonymat : "M_i" ($1 \leq i \leq 50$) pour les professeurs de mathématiques et "P_i" ($1 \leq i \leq 50$) pour les professeurs de physique.

II.2.1. Analyse des réponses au questionnaire de mathématiques

a) L'organisation et la gestion des orientations du programme des mathématiques

Question 1 : indiquez la (les) périodes(s) au cours de(s)-quelle(s) vous avez enseigné en terminale scientifique.

[68] ainsi que les questions (qui sont reprises)

Les enseignants ayant répondu au questionnaire, enseignent actuellement les classes de terminales S. Parmi eux, 15 enseignent depuis les années 70, 10 depuis les années 80, 14 depuis les années 90 et 11 entre 2000 et 2005 (réponse à la question 1).

Question 2 : *A quel(s) moment(s) de l'année traitez-vous actuellement les équations différentielles ? Quelles sont vos raisons (institutionnelles, organisation personnelle, cohérence avec d'autres enseignements, ...)*

Le tableau ci-dessous indique les différents moments où sont traitées les équations différentielles au cours d'une année :

Sept/oct	Nov/déc.	Janv/fév	Mars/av	Mai/juin
18	36	12	15	

Il y a 18 enseignants qui commencent le traitement des équations différentielles entre septembre et octobre, 25 (parmi les 36) entre novembre et décembre et 7 (parmi les 12) entre le mois de janvier et février.

Pour ce qui concerne les raisons de leur choix, nous avons 46 réponses justifiées réparties comme suite :

- 36 sur 50 enseignants affirment que c'est une répartition qui leur est imposée par le programme officiel (raisons institutionnelles).

- 27 enseignants (dont 24 ont déjà choisi la raison institutionnelle) évoque la "cohérence disciplinaire" et affirment avoir eu une concertation au début de l'année avec leurs collègues de physique.

- 18 enseignants justifient le choix de leur répartition par une organisation personnelle. C'est dans ce lot que se trouvent les 7 enseignants qui commencent le traitement des équations différentielles entre le mois de janvier et de février. Le cas de l'enseignant (M10) est très particulier, il commence le traitement des équations différentielles entre le mois de février et le mois de mars et justifie ce choix par deux raisons :

« *Organisation personnelle et cohérence avec mon cours* » (M10)

Nous représentons dans le diagramme ci-dessous ces résultats.

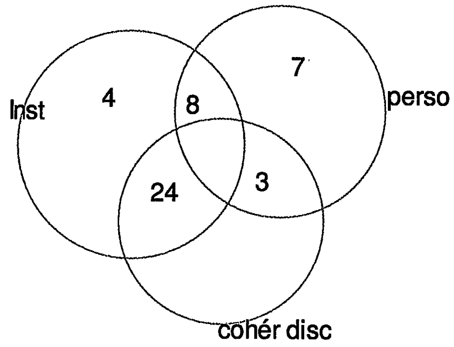


Diagramme 2 : nombre d'enseignants en fonction des raisons évoquées

b) Place de la méthode d'Euler

Question 3 : *Combien de temps (en heures) consacrez-vous à la méthode d'Euler ?*

Le tableau ci-dessous donne la répartition des enseignants en fonction du temps consacré au traitement des équations différentielles

Durée (heure)	0,5	1	1,5	2	2,5	3	6
Nombre d'enseignants	9	12	4	9	7	2	1

Tableau 25 : Répartition des enseignants en fonction du temps consacré à la méthode d'Euler.

Pour cette question, 44 enseignants (sur 50) traitent la méthode d'Euler, 2 enseignants ne la traitent pas et 6 enseignants n'ont pas répondu à cette question.

Le tableau montre que le temps consacré à la méthode d'Euler n'est pas le même pour tous les enseignants. On y relève une durée minimale de 0,5 heure réalisée par 4 enseignants et un maximal (soit 0,5 cours) et de 6 heures, réalisé par 1 enseignant (soit 2 heures de cours et 2 heures d'exercices). Cette disparité semble traduire l'importance accordée à la méthode d'Euler pour introduire la fonction exponentielle ; il y 25 enseignants (plus de la moitié) y passent moins de 2 heures alors qu'il y en a 19 qui font entre 2 heures et 6 heures.

Pour les 6 non réponses, on peut supposer que ces enseignants ne traitent pas la méthode d'Euler, ou alors qu'ils ont du mal à chiffrer le temps qu'ils mettent sur cette méthode. Mais ce deuxième cas ne nous semble pas plausible car, à défaut de précision sur le temps passé en cours, TD ou exercices, une durée approximative pouvait être indiquée.

Quant aux 2 enseignants (M10 et M11) qui ne traitent pas la méthode d'Euler, aucune précision n'est donnée. Cependant les réponses aux questions suivantes nous donnent des indications sur le point de vue de ces 2 enseignants et même de 2 autres n'ayant pas répondu à la question (il s'agit de M8 et M32).

En effet, les commentaires des enseignants (M8) sur les questions 4, 8 et 9 de ce questionnaire nous donnent une indication sur la représentation de cet enseignant, de la méthode d'Euler. En effet, (M8) pointe quelques difficultés liées à l'utilisation de cette méthode ; il pense que la méthode d'Euler introduite, très vite en Première S, paraît difficile à conceptualiser pour différentes raisons que nous regroupons en deux catégories : l'une que l'on peut qualifier d'épistémologique et l'autre de didactique :

a) Lien entre méthode d'Euler et la notion d'approximation des fonctions

> [On enseigne la méthode d'Euler à] *« ...des élèves qui n'ont jamais abordé ni traité la problématique "approximation d'un nombre avec une précision donnée" : l'inconnue à approcher ici est une fonction ; dès le deuxième point, on approche à partir d'un point qui est lui même approché : ce qui surprend les élèves »;* (M8)

b) Liaisons trophiques entre méthode d'Euler, équation différentielle, approximation affine : c'est la non maitrise par les élèves, de la notion d'approximation affine est qui principalement mise en cause :

> *« La méthode d'Euler présentée à la hussarde en maths dans l'urgence en début de TS inquiète beaucoup les élèves qui prétendent n'avoir jamais vu $f(a + h) = f(a) + h f'(a) + h e(h)$ la méthode leur parait très dure ».*
>
> *« ... il m'apparaît que la méthode d'Euler est mise en œuvre en sciences physiques sur des équations différentielles que les élèves savent résoudre de manière exacte, ce qui me parait pervers ».* (M8)

(M8) souligne dans ces propos que la plupart de ces collègues qui interviennent en première font l'impasse sur Euler. On peut alors chercher à savoir davantage les raisons qui font que certains enseignants ne traitent pas (délibérément) cette méthode d'Euler alors que les programmes actuels de première et terminale S la recommandent.

On construira [69]point par point un ou deux exemples d'approximation de courbe intégrale définie par : $y'=f(t)$ et $y(t_0) = y_0$ en utilisant l'approximation $\Delta f \approx f'(a)\Delta t$.

Encadré 1 : extrait du programme 1e S 2001 (partie mise en œuvre)

...On construira avec la méthode d'Euler introduite en première des représentations graphiques approchées de *f* dans le cas *k= 1* on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits.

[69] La méthode d'Euler est la méthode choisie dans le document d'accompagnement du programme (CNDP 2001 p. 63)

Encadré 2 : extrait du programme de TS 2002 (partie modalité de mise en œuvre)

Ce refus peut être interprété comme étant une résistance vis-à-vis de la nouveauté. Cette attitude peut trouver son explication dans le fait que les enseignants n'ont pas été assez sensibilisés et entrainés à l'introduction de la méthode d'Euler dans les programmes scolaires ; ou bien que le travail sur cette méthode en formation continue (s'il se fait) ne trouve pas d'échos auprès des enseignants ; ou encore, c'est une méthode qui est difficile et pour l'élève et pour l'enseignant.

Le malaise exprimé par M8 et M32 sur la méthode d'Euler peut être une explication de la disparité des résultats recueillis à ce niveau. À cela, on peut ajouter le fait que son utilisation dans le cadre du traitement des équations différentielles exige des compétences informatiques que beaucoup d'enseignants sont obligés d'acquérir. C'est sans doute pour pallier les insuffisances dans la maîtrise des outils informatisés qu'a été mis en place depuis 2004, le Certificat Informatique et Internet (C2i.)

Synthèse

En résumé, on a pu noter que l'enseignement de la méthode d'Euler suscite peu d'enthousiasme chez certains professeurs de mathématiques sur la durée : (22 sur 50 consacrent moins de 2h l'année, 7 non-réponses).

On peut regretter, dans ce questionnaire, de ne pas proposer une question (ouverte) aux enseignants, ce qui nous aurait permis de recueillir directement leur point de vue sur la méthode d'Euler.

Néanmoins, parmi les réponses reçues à cette question montrent des points de vue variés : les (rares) commentaires que nous avons recueillis à ce sujet (2 enseignants) auxquels on ajoutes les réponses (de 3 autres enseignants) à la question 8, indiquent que la méthode d'Euler est une méthode difficile pour l'élève ; ces difficultés ont plusieurs origines :

- la méthode d'Euler repose sur une problématique de « l'approché » qui n'est pas enseigné en Terminale et donc peu connu chez les élèves à ce niveau d'étude.
- les élèves ont du mal à maîtriser la notion d'approximation affine, sans laquelle la compréhension de la méthode, telle qu'elle s'enseigne, s'avère impossible.

Du côté des enseignants, les remarques portent sur la formation :

- si l'introduction de la méthode d'Euler dans les programmes scolaires des mathématiques est légitimée par son utilisation en physique, il y a très peu d'accompagnement (documentations, formation continue, ...) sur l'articulation mathématiques-physique.

- certains enseignants ne maîtrisent pas toujours les outils informatiques.

Ces éléments mettent alors en question la pertinence de la méthode d'Euler en mathématiques.

c) La relation mathématiques-physique

Question 4 : Pensez-vous qu'il est préférable d'aborder les équations différentielles en cours de mathématiques avant leur utilisation en physique, ou bien l'inverse ?

Le tableau ci-dessous résume les réponses à cette question.

Mathématiques	Physique	Simultanément	indépendamment
35	0	8	7

<u>Priorité en mathématiques</u>

35 enseignants sur 50 déclarent qu'il est préférable de commencer l'enseignement des équations différentielles en mathématiques.

L'enseignant (M2), par exemple, considère que les notions mathématiques sont utilisées en physique avec moins de rigueur qu'il ne le faut :

> « *nos amis physiciens n'emploient pas toujours un langage mathématique d'une grande rigueur* ». (M2)

En dehors de la *rigueur*, il y a aussi la *maîtrise* de l'objet mathématique qui est évoquée. Ainsi, pour (M27) :

> « *Les élèves doivent d'abord maîtriser le concept mathématique (notation, fonctions solutions) pour pouvoir l'appliquer judicieusement en physique* ».(M27)

Quant à M1, il plaide pour un enseignement des mathématiques plus solide permettant un réinvestissement pertinent dans les autres sciences soit :

> « *La première approche est mieux perçue que les suivantes. Je préfère le faire [l'enseignement des équations différentielles] mathématiquement et rigoureusement avant que la PC [physique et chimie] et les SVT [sciences de la vie et de la Terre] ne s'en servent comme outil* ». (M1)

Le point de vue de (M1) va dans le même sens que celui de (M4)

> « *Ma collègue de physique souhaite que je les introduise d'abord. Pour ma part, je souhaite faire la synthèse des chapitres précédents à cette occasion et montrer l'utilité des notions mathématiques appliquées à la physique.* » (M4)

Priorité en physique

Aucun enseignant interrogé ne pense à un enseignement des équations différentielles qui commencerait en physique.

Simultanément

Il y a 8 enseignants qui pensent que l'enseignement des équations différentielles devrait se faire simultanément en mathématiques et en physique. En s'appuyant sur les réponses fournies par les 8 enseignants, il apparaît que le caractère « simultané » de l'enseignement des équations différentielles entre les deux disciplines n'est pas nécessairement une co-intervention des professeurs, mais plutôt d'une mise en mise place d'un dialogue entre les deux professeurs pour décider de la progression, des notations.

C'est le cas de (M9) pour qui, l'intérêt didactique d'une telle approche est de permettre un travail en commun des enseignants sur l'homogénéisation des notations, par exemple, mais aussi de donner à l'élève plusieurs facettes d'un même savoir :

> *« En mathématiques et en physique, nous n'utilisons pas les mêmes notations : dérivée en mathématiques et notation différentielle en physique d'où la nécessité d'explications simultanées pour la bonne compréhension des élèves. Il me paraît indispensable de ne pas laisser s'installer des incompréhensions. C'est ce que j'ai fait cette année avec le collègue de physique »* (M9)

On peut bien penser que ces enseignants sont d'accord avec le programme sur la mise en œuvre de la continuité didactique. C'est dans ce sens que nous avons envisagé compléter ce questionnaire par des entretiens que nous présenterons plus tard.

Indépendamment

Nous avons compté 7 enseignants qui pensent qu'il est inutile de se poser la question de la priorité d'un enseignement des équations différentielles entre les mathématiques et la physique. La concertation entre les enseignants des deux disciplines est difficile voir quasi-inexistante. Par exemple, (M32) parle d'un

> *« mépris du physicien pour ce qui est fait en classe de mathématiques »* (M32)

Ce qui rejoint le point de vue de l'enseignant (M49), qui parle d'une cohérence interne à la physique :

> *« les enseignants de physique savent bien se débrouiller sans nous, ils ont leur progression interne... ».* (M49)

Ainsi, on relève tout d'abord qu'aucun enseignant interrogé n'a accordé la "priorité" de l'enseignement des équations différentielles à la physique. La majorité (35) s'accorde à dire qu'il est préférable que l'enseignement de cet objet de savoir important en mathématiques soit d'abord étudié en mathématiques avant les autres disciplines.

Question 5 *Travaillez-vous, sur ce thème, conjointement avec les collègues de mathématiques*

37 enseignants déclarent avoir eu des contacts avec leurs collègues physiciens ; mais ces contacts sont de différente nature :

- 33 parlent de discussions informelles sur ce que chacun dans sa classe sur les équations différentielles. On note peu de commentaires détaillés concernant le deuxième volet de la question qui demande « à quelle occasion … ». dans les réponses les enseignants rappellent des notions mathématiques sur lesquelles les discussions portent sans préciser ce qu'ils font réellement. Il s'agit : « de la fonction exponentielle, des équations différentielles, de la dérivée » qui sont les notions citées. L'enseignant M27 parle de rencontre ponctuelle :

« Très ponctuellement ; collaboration étant un mot exagéré pour ma part, il s'agit plutôt de discussions à propos des notions traitées en maths dont ont besoin les collègues de physique » (M27)

- Par contre 4 enseignants parlent d'un vrai travail organisé qui est entrepris par les collègues des deux disciplines. C'est le cas de l'enseignant (M2) qui parle « *du choix de l'ordre d'introduction des notions* » (M32) :

« *Nous avons organisé une séance de travail avant d'aborder le thème des équations différentielles et j'ai expliqué à mon collègue de physique comment je traitais la méthode d'Euler. Avant cette réunion, je lui avais remis une photocopie d'un article… sur ce thème. Et nous en avons discuté* ». (M32)

Cependant 13 enseignants affirment n'avoir eu aucun contact avec leurs collègues de physique.

Il en ressort deux constats :

- De nombreux enseignants (37 sur 50) ont des contacts informels avec leur collègue de la physique. Mais il y a très peu qui se sont organisés, par exemple en début d'année, pour mener une réflexion commune sur des questions de notations, le choix des activités à traiter, le moment et la manière d'introduire les équations différentielles, etc.

- Une proportion non négligeable (13 sur 50) d'enseignants dit n'avoir pas de contact avec leurs collègues de physique ou bien qu'il est difficile d'établir des contacts avec eux.

Synthèse des questions 4 et 5

Par comparaisons de ces résultats aux réponses à la question précédentes, on en a déduit le tableau suivant.

Préférence/priorité		mathématiques	Physique	Simultanément	indifférent
Travail conjoint	oui	29	0	6	2
	non	6	0	2	5

Tableau 26 : croisement entre les questions 4 et 5

Le tableau nous renseigne à la fois sur :

- la répartition du nombre d'enseignants selon qu'ils aient ont ou non travaillé avec leurs collègues de physique et sur la préférence des enseignants
- la discipline qu'ils aimeraient voir abordée avant les équations différentielles.

Nous considérons que les 8 enseignants ayant répondu « simultanément » à la question 4 font partie de ceux qui sont favorables à la continuité didactique telle que décrite dans le programme. En revanche on a peu d'éléments pour caractériser les autres enseignants. La question 6 pourra nous apporter un éclairage.

On note que parmi les 7 enseignants ayant répondu « indifférent » il y a 5 qui n'ont pas travaillé avec leur collègue de physique.

En fonction des réponses obtenues aux questions 4 et 5, nous reprenons la catégorisation que nous avons faite des enseignants dans la partie "analyse a priori" du questionnaire (p. 270) en termes de professeur « matheux-physique » et professeur « matheux ».

- 31 professeurs « matheux-physique » :

On considère que cette catégorie d'enseignants émet le souhait de voir se développer une collaboration entre leurs collègues de physique. Les raisons avancées sont essentiellement : l'harmonisation des notations, installation d'un dialogue avec le collègue de l'autre discipline pour éviter les incompréhensions.

- 8 professeurs « matheux » :

Ce sont les enseignants qui évoquent, en premier lieu, le manque de rigueur mathématique dans le cours de physique. Hormis les questions de rigueur, ces enseignants craignent que leurs élèves ne puissent arriver en classe de mathématiques avec des représentations erronées sur les équations différentielles. Ils considèrent que la première approche souhaitée soit celle qui consisterait à enseigner les équations différentielles d'abord en mathématiques. De plus, pour ces enseignants, mener un travail didactique conjoint avec leurs collègues de physique n'a pas trop de sens car chaque discipline à sa cohérence interne.

Par manque de réponses précises ou de commentaires, nous n'avons pas pu classer les 11 enseignants restants dans ces deux catégories d'enseignants.

d) L'importance d'un enseignement des équations différentielles au secondaire

Question 6 : *Quelle est selon vous l'importance d'un enseignement portant sur les équations différentielles dans une formation scientifique générale du secondaire ?*

Nous regroupons dans le tableau suivant, l'ensemble des réponses à cette question.

Très important	Assez important	Peu important	Sans intérêt
15	25	10	0

Tous les enseignants interrogés pensent que l'enseignement des équations différentielles n'est pas sans intérêt dans l'enseignement secondaire.

On compte 15 enseignants qui estiment que l'enseignement de cet objet de savoir est « très important ». La principale raison avancée est la place des équations différentielles dans les autres disciplines comme la physique. On cite le cas de M40 qui avance comme raison

> *« Utilisation dans d'autres disciplines »*

ou bien M45, qui aborde dans le même sens que M40 en affirmant que

> *« C'est un outil indispensable aux autre disciplines, en particulier en sciences physiques. De plus, les raisonnements utilisés lors de démonstrations ou d'exercices permettent de réinvestir certaines notions (équations, fonctions) dans un contexte différent de celui vu dans les classes antérieures. Cela permet donc de juger de la bonne compréhension de ces notions par les élèves »* (M40)

Par ailleurs, on constate que la majorité des enseignants (25 sur 50) affirment qu'il est « assez important » de les enseigner à ce niveau.

Le reste des enseignants interrogés (soit 10 sur 50), affirment alors qu'il est « peu important » de les enseigner à ce niveau, ceci sans doute, en raison[70] de l'approche actuelle retenue pour enseigner les équations différentielles. C'est le cas de l'enseignant (M8) qui appartient au couple (indifférent ; non) c'est-à-dire, il a répondu "indifférent" à la question 4 et "non" à la question 5). Nous rappelons ci-dessous quelques commentaires que cet enseignant donne aux questions 8 et 9 (que nous pensons être en rapport avec cette question). En effet, la principale raison d'être des équations différentielles dans les programmes actuels des mathématiques est « l'enseignement de la physique » pense t-il :

> « *Il est vrai que les équations différentielles sont essentielles dans beaucoup de domaines scientifiques. Est-elle essentielle dans l'enseignement secondaire comme d'aucuns le prétendent ? La vocation de l'enseignement du secondaire est-elle d'apprendre à utiliser le bistouri parce que c'est l'outil principal du chirurgien ?* » (M8)

(M8) poursuit en ajoutant que :

> « *Sérieusement, les équations différentielles, si elles sont vues autrement que comme des recettes (formules établies en mathématiques) pour résoudre des situations issues de la physique, sont une notion difficile qu'il serait déraisonnable de vouloir décortiquer prématurément en mathématiques* ».

Synthèse

Nous regroupons dans le tableau ci-dessous les résultats des trois questions précédentes (4, 5 et 6).

	Mathématiques		Physique		Simultanément		indifférent	
	Oui	Non	Oui	Non	Oui	Non	Oui	Non
Très important	6	1			4	1	1	2
Assez important	19	1			2	1		2
Peu important	5	3					1	1
Sans intérêt								

Tableau 27 : résumé des réponses aux questions 4, 5 et 6

On constate qu'il n'y a aucun enseignant qui pense que l'enseignement portant sur les équations différentielles :

- est sans intérêt dans la formation scientifique générale,
- devrait être abordé d'abord en physique avant qu'il ne le soit en mathématiques.

Néanmoins il y en a 10 sur 50 qui pensent que l'enseignement des équations différentielles est peu important, la présence de cet objet de savoir n'étant vue, compte tenu des textes du

[70] Nous faisons là une supposition en raison d'absence de commentaires à cette question

programme actuel, que parce que « *la physique en a besoin* ». Parmi les 10, il y a 6 enseignants "matheux" et aucun de la catégorie "matheux-physiciens".

e) L'enseignement des équations différentielles et les nouvelles technologies de l'information et de la communication

Question 7 : *« Utilisez-vous des moyens informatiques lorsque vous traitez des équations différentielles ? »*

La plupart des enseignants interrogés (39) utilisent l'ordinateur. Parmi eux, 13 utilisent en plus la calculatrice. L'exemple d'utilisation des ces moyens informatisés le plus cité, relativement à l'enseignement des équations différentielles, se rapporte à la construction d'une courbe approchée de la fonction exponentielle, élargie à la visualisation des courbes solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ en utilisant la méthode d'Euler.

Par contre, 2 enseignants (M10 et M11) affirment ne pas avoir utilisé les moyens informatisés. Ils ne justifient pas leurs réponses. Nous rappelons que la réponse de ces deux enseignants à la question 3 dit qu'ils ne traitent pas la méthode d'Euler.

On compte 5 enseignants qui n'ont pas répondu à cette question.

Question 8 : *Les moyens informatisés permettent a priori une nouvelle approche et/ou un nouveau regard sur les équations différentielles. Pensez-vous que ceci constitue plutôt une aide ou plutôt une difficulté supplémentaire : Pour l'enseignant / pour l'élève*

Nous représentons les réponses obtenues dans le tableau ci-après.

	Pour les élèves	**Pour les enseignants**
Aide	35	20
Difficulté	5	10
Sans réponses	10	

Tableau 28 : Réponses des enseignants sur l'utilisation des outils informatiques

Pour chacune des réponses, les raisons évoquées sont diverses mais peuvent se ramener à quelques unes que nous résumons ici.

- <u>Aide pour les enseignants et les élèves</u>

Les outils informatisés constituent une aide (55 réponses[71]) : « une aide pour les élèves » répondu par 35 enseignants et « une aide pour les enseignants » répondu par 20 enseignants.

Les raisons en sont multiples et variées. Nous les regroupons en catégories : efficacité technologique et raisons didactiques :

<u>Raisons techniques ou efficacité technologique</u> :

Les outils informatisés offrent une rapidité sur le traitement des données ce qui fait gagner du temps à l'enseignant et de multiplier des exemples :

« *C'est plutôt une aide dans la formation scientifique ; les équations différentielles se prêtant à l'idée de modélisation et l'ordinateur est un outil rapide* » (M45)

« *gain de temps ; facilité d'aborder la notion de pas de calcul … grâce à la multiplicité des essais que peuvent faire les élèves en un temps réduit* » (M36)

<u>Raisons didactiques</u> :

Dans le cas spécifique de la construction des courbes approchées, ces outils permettent la superposition des courbes-solutions. L'intérêt didactique d'une telle démarche et d'une telle potentialité dans la représentation de la courbe approchée de la fonction exponentielle à l'aide de la méthode d'Euler :

« *Utilisation d'un tableur pour introduire la fonction exponentielle par la méthode d'Euler, en tant que solution d'une équation différentielle* » (M38)

« *Association courbes-résultats mathématiques algébriques ; probablement une économie cognitive pour l'élève* » (M26)

- Difficultés pour les élèves et les enseignants

Les outils informatisés constituent une difficulté (15 réponses) :

- une difficulté chez les enseignants (10 réponses). Parmi les réponses, on relève celle de (M11) qui indique que pour l'enseignant, c'est « *une perte de temps* ». On peut aussi citer (M48) qui pense que :

  « *cela [ces moyens informatisés] ne dispensent pas des efforts nécessaires de compréhension des énoncés et des méthodes de résolution* » (M48)

- une difficulté chez les élèves (5 réponses). Ces difficultés relèvent essentiellement de l'apprentissage et de la maîtrise de ces outils.

Remarque :

[71] Nous rappelons que pour cette question, il y avait possibilité de choisir plusieurs réponses

sur les 56 (38 +18) réponses concernant les élèves, il y en a 16 qui relativisent sur l'utilisation des outils informatiques : elle peut être une aide ou au contraire une source de difficulté pour l'élève.

> « ... *aide énorme pour illustrer la méthode d'Euler et ses applications. Difficultés de mise en œuvre pour l'enseignant peu formé aux TICE; mais la mise en œuvre par les élèves est difficile* », (M27)

On peut aussi noter la réponse de (M12) qui s'interroge sur l'efficacité des outils informatisés dans l'enseignement de la méthode d'Euler :

> « *Et puis, qu'est-ce que ça apporte ? (à part Euler pour Euler). Je conçois par contre qu'il y a sûrement des choses à faire en physique à partir de données expérimentales pour déterminer a et b dans y'=ay +b, si l'on choisit un modèle d'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants* ... ». (M12)

Nous signalons enfin que 10 enseignants n'ont pas répondu à cette question.

f) Pertinence scientifique

Question 9 : L'introduction des approches informatisées vous paraît-elle pertinente / légitime sur le plan scientifique ?

Sur cette question, on compte 46 réponses et 4 non réponses.

La majorité des enseignants (45 réponses dont 6 non justifiées) pensent que l'approche informatisée d'un enseignement des équations différentielles est légitime et pertinente dans l'enseignement au secondaire ; et les raisons en sont multiples.

Efficacité technologique :

La puissance de l'informatique permet un gain de temps et un traitement des problèmes plus complexes. Il s'agit aussi de montrer l'importance, l'intérêt premier de l'informatique en évitant des calculs fastidieux et des tâches répétitives.

Raisons pédagogiques :

- L'approche informatisée de l'enseignement des équations différentielles permet de favoriser un enseignement interdisciplinaire :

  « *introduction à la recherche, visualisation, lien avec les sciences expérimentales* » (M1)

- L'un des avantages des outils informatisés est de permettre, un échange des fichiers entre l'enseignant et ses élèves sur le travail à réaliser et une conservation de ces fichiers, aussi d'aborder autrement les objets de savoirs :

  « ... *autre façon d'aborder les concepts qui correspond mieux à l'état d'esprit des élèves actuels. Souvent apprécié des élèves* » (M5)

Raisons culturelles

> *« parce que l'informatique fait partie de l'environnement quotidien d'un mathématicien d'aujourd'hui »* (M48)

Par ailleurs, parmi les 40 réponses justifiées, il y a 7 enseignants qui ajoutent que l'utilisation des outils informatisés n'est d'autant plus efficace qu'à condition que les élèves et les enseignants la trouvent pertinente. C'est le cas de M15 :

> *« l'utilisation pertinente de l'outil informatique n'est possible que si l'on maîtrise la notion mise en œuvre. Sinon c'est de la pure constatation ... »* (M15)

Sur les 46 réponses recueillies, 1 enseignant a répondu "non" à cette question (c'est-à-dire qui pense que l'introduction des outils informatisés dans l'enseignement n'est pas légitime). Selon lui,

> *« l'ordinateur n'apporte qu'une aide à la compréhension, permet de présenter le concept plus concrètement, les réponses peuvent être facilement vérifiées MAIS l'ordinateur ne remplace pas une démonstration rigoureuse »*

Aucune référence à la certification (C2i) n'a été mentionné ou bien sur l'intérêt pour la vie future (à l'université, dans son métier, chez soi)

II.2.2. Analyse des réponses du questionnaire de physique

a) L'organisation et la gestion des orientations du programme des mathématiques

Question 1 : *Indiquez la (les) périodes au cours de(s)- laquelle(s) vous avez enseigné en terminale scientifique ?*

Parmi les 50 enseignants interrogés, 5 enseignants depuis les années 70, 10 depuis les années 80, 15 depuis les années 90 et 20 entre 2000 et 2003.

Question 2 : *A quel(s) moment(s) de l'année abordez-vous actuellement les équations différentielles ? Quelles sont vos raisons (institutionnelles, organisation personnelle, cohérence avec d'autres enseignements, ...)*

Sur le moment :

Les réponses recueillies ici indiquent les différents moments de l'année où apparaissent les équations différentielles dans la pratique des classes des enseignants. Mais ces réponses ne permettent pas chiffrer la durée exacte (en heures par exemple) qu'un enseignant consacre aux équations différentielles.

Il apparait alors que les enseignants abordent les équations différentielles à divers moments de l'année. Nous avons compté 13 enseignants sur 50 qui les abordent uniquement sur une période d'un mois :

Sept/oct	Nov/déc.	Janv/fév	Mars/av	Mai/juin
4	4	4	1	0

Tableau 29. Période où sont abordées les équations différentielles

Cependant la majorité des enseignants (37 sur 50) abordent les équations différentielles pendant plusieurs moments de l'année (entre septembre et juin). Parmi eux, il y en a 18 qui les commencent entre novembre et décembre et 16 entre janvier et février.

Ceci nous conduit à donner dans le tableau ci-dessous, une répartition en fonction de l'intervalle de temps consacré aux équations différentielle :

1 mois	2 mois	3 mois	4 mois
13	21	10	6

Tableau 30 : répartition selon le temps consacré à l'étude des équations différentielles

Les nombres rapportés dans le tableau 30 indiquent la période où les équations différentielles apparaissent dans la progression des enseignants interrogés. Nous retrouvons dans la première colonne le nombre représentant la catégorie d'enseignants qui n'abordent les équations différentielles que durant un mois. On peut bien constater l'écart entre cette catégorie d'enseignants et les 6 enseignants qui abordent les équations sur une période de 4 mois. D'où la nécessité d'examiner les raisons qui peuvent justifier ces écarts.

Sur les raisons

Nous rappelons qu'il était possible de choisir plusieurs raisons parmi celles que nous avons proposées.

Les raisons "institutionnelles" sont évoquées par 40 enseignants, "l'organisation personnelle" par 11 enseignants et la "cohérence avec d'autres enseignements" par 12 enseignants.

Plus précisément il y a des "intersections" parmi les catégories des raisons évoquées ; par exemple parmi les 40 enseignants, il y en a 4 qui ont aussi choisi comme raisons "l'organisation personnelle" et 6 comme "cohérence avec d'autres enseignements". D'où le diagramme ci-dessous :

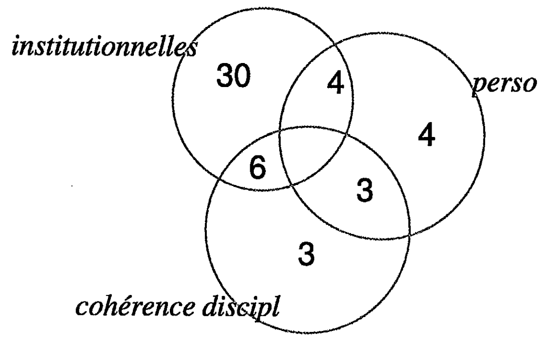


Diagramme 3 : Nombres d'enseignants en fonction des raisons évoquées.

b) Place de la méthode d'Euler

Question 3 : *Combien de temps (en heures) consacrez-vous à la méthode d'Euler ?*

Les réponses des enseignants à cette question font apparaître une disparité sur le temps consacré à la méthode d'Euler relativement à la partie "cours", "TD" ou "exercices" comme on peut le constater dans le tableau ci-dessous donnant le nombre d'enseignants par rapport au temps consacrés à la méthode d'Euler dans chacune des trois parties (cours, TD, exercices).

Temps	Cours	TD/TP	Exercices	Total
0	14	3	3	20
10 min	1	0	0	1
30 min	10	6	13	29
75 min	0	0	1	1
1h	11	7	15	33
1,5 h	0	3	2	5
2h	5	18	10	33
3h	0	7	4	11
4h	1	3	0	4
5h et plus	0	2	1	3
Total	42	49	49	140

Tableau 31. Durée consacrée à la méthode d'Euler.

On peut bien constater que le moment d'aborder la première fois la méthode d'Euler n'est pas le même pour tous les enseignants. Par exemple, la première ligne du tableau précise le nombre d'enseignants qui n'abordent pas la méthode d'Euler dans l'une des trois parties (cours/TD/exercices) ; on peut y voir : 14 enseignants sur 50 qui n'abordent pas la méthode d'Euler dans le cours (mais l'es abordent ailleurs) ; 3 en TD/TP et 3 en exercices.

Mais le tableau permet aussi de repérer les durées minimale et maximale consacrées à l'une des trois parties (cours/TD/exercices) :

- pour la durée minimale, 10 minutes sont déclarées par un seul enseignant (E3) dans la partie cours et 30 minutes pour la partie TD/TP (déclarées par 6 enseignants) et 30 minutes pour la partie exercice (effectuées par 13 enseignants).
- pour la durée maximale, 4 heures sont déclarées dans le cours (par un enseignant), plus de 5 heures (7 heures plus précisément, effectuées par l'enseignant E12) et 5 heures en exercices

Cependant, ce tableau ne permet pas de retrouver le nombre total d'heures qu'un enseignant consacre à la méthode d'Euler. C'est pour cela que nous le complétons par un autre tableau qui donne la répartition des enseignants selon le nombre (total) d'heures consacrées à la méthode d'Euler.

Durée (heure)	1,5	]1,5 ; 2]	]2 ; 2,5]	]2,5 ; 3]	]3 ; 3,5]	]3,5 ; 4]	]4 ; 4,5]
Nombre d'enseignants	11	5	8	3	2	6	1
Durée (heure)	]4,5 ; 5]	]5 ; 5,5]	]5,5 ; 6]	]6 ; 6,5]	]6,5 ; 7]	7,5 et plus	
Nombre d'enseignants	2	1	5	1	2	3	

Tableau 32 : Nombre d'heures passé sur la méthode d'Euler par enseignant

D'après le tableau 32, on constate que la durée minimale (annuelle) passée sur la méthode d'Euler est de 1,5 h (effectuée par 11 enseignant) et la durée maximale est de 12 h réalisée par l'enseignant P2[72]. Les réponses obtenues ne permettent d'expliquer l'écart constaté entre la durée minimale (1,5 h) et la durée maximale (12 h). Si on se rapporte aux réponses à la question précédente 2a), il est particulièrement étonnant de voir que les enseignants P2 et P12 qui consacrent à la méthode d'Euler respectivement 12 h (4 h cours + 3 h TD/TP + 5 h exercices) et 9h (1 h cours + 7 h TD/TP + 1 h exercice), déclarent traiter les équations

[72] Les 3 enseignants du dernier intervalle (8 et plus) sont P2, P12 et P16. Ils consacrent respectivement 12h, 9h et 10h.

différentielles (y compris la méthode d'Euler) en un seul mois (entre novembre et décembre).

P12 évoque comme raison de sa progression « l'organisation personnelle » et ajoute :

> *« En novembre-décembre, je traite la radioactivité donc équation différentielle du premier ordre et introduction de la méthode d'Euler pour comparer méthode analytique et méthode numérique »* (Enseignant P12)

Les explications que P12 ajoute à la fin de la question sur la méthode d'Euler nous interrogent sur sa réponse à la deuxième question :

> *« la méthode d'Euler est vue à de multiples occasions (radioactivité pour l'introduire puis circuit RL, RC et pour la chute avec frottement et de façon plus sophistiquée pour étudier la trajectoire d'une planète-Euler à deux dimensions (x,y) et deux niveau* $\vec{a} \Rightarrow \vec{v} \Rightarrow \vec{OM}$ *»* (P12).

On peut donc penser qu'il a oublié de cocher (question 2) d'autres périodes où il aborde les équations différentielles (et donc la méthode d'Euler).

Quant aux enseignants P2 et P9 (pour la durée maximale) mais aussi les 11 enseignants qui passent 1,5h (durée minimale), il n'y a pas d'autres commentaires sur les réponses à la question 3 ; il est ainsi difficile de justifier l'écart constaté sur la durée consacrée à la méthode d'Euler.

c) Perception de l'interaction mathématiques-physique

Question 4 : <u>Pensez</u>*-vous qu'il est préférable d'aborder les équations différentielles en cours de mathématiques avant leur utilisation en physique, ou bien l'inverse ?*

Nous regroupons dans un tableau les réponses des enseignants à la question 4 avant de les commenter :

Priorité	Mathématiques	Physique	Simultanément	Indépendamment
Nombre d'enseignants	27	5	17	2

Tableau 33. Priorité accordée aux équations différentielles

Remarque : parmi toutes les réponses, 2 enseignants (P2 et P8) ont choisi l'alternative : "priorité en mathématiques" ou "simultanément".

<u>Priorité à l'enseignement des mathématiques</u>

Sur les 50 enseignants questionnés, 27 pensent qu'il est préférable d'aborder d'abord les équations différentielles en mathématiques avant qu'elles ne soient vues en physique :

Nous résumons les principales raisons :

- Économie de temps :

Ceci ferait gagner du temps au professeur de physique si les élèves ont une maîtrise des outils mathématiques. Rappeler le traitement des équations différentielles en physique réduit le temps des activités propres à la physique. C'est dans ce sens que nous comprenons les raisons évoquées par les enseignants P1, P13 :

> *« gain de temps ... » (P1)*
>
> *« ... le débrouillage des mathématiques est alors primordial pour éviter que toute la difficulté ne se focalise sur l'aspect mathématique »*

Les réponses font ressortir clairement le statut des mathématiques comme outil pour la physique ; on peut le lire chez les enseignants P8, P19 ou P23 :

> *« il me semble que les élèves sont plus à l'aise quand l'outil mathématique est connu »* (P8)
>
> *« mieux vaut avoir étudié l'outil avant de l'utiliser » (P19)*
>
> *« l'outil mathématique est une gène permanente pendant l'année de terminale »* (P23)

Le statut d'outil évoqué par 8 enseignants est relié à l'importance des mathématiques en physique. La maîtrise des connaissances des mathématiques s'imposent avant qu'elles ne soient utilisées par d'autres disciplines.

- Maîtrise de connaissances mathématiques

Cette raison est évoquée par 10 enseignants dont nous rapportons les explications de quelques uns :

> *« c'est au mathématicien de préciser le langage, la notation et le sens mathématique. Le physicien utilise le langage et la notation et leurs donne un sens physique en cohérence avec le sens mathématique »* (P15)
>
> *« pour avoir une première approche par « spécialiste » de la didactique des math. Je ne suis que prof de physique ... »* (P41)
>
> *« après un traitement théorique mathématique, les élèves sont probablement plus à même de s'imprégner de l'aspect physique de la méthode »* (P9)

Cette catégorie de raisons est très proche de celle que suit : continuité d'un milieu habituel.

- Continuité d'un milieu habituel

L'élève est d'autant plus rassuré de retrouver un savoir mathématique quand celui –ci a déjà été abordé dans le cours de mathématiques. C'est dans ce sens que s'inscrit ce que dit P1 :

> *« L'élève panique moins en retrouvant en physique ce qu'il a vu en mathématiques »*

Ou bien P43 :

> *« L'élève accepte mieux les concepts mathématiques quand ils sont présentés par le professeur de mathématiques »*

<u>Priorité à l'enseignement de physique.</u>

Une minorité d'enseignants interrogés (5 sur 50) pensent qu'il faut une approche "pragmatique" de l'enseignement de la physique, mettant en avant l'exploitation des résultats expérimentaux ; ensuite viendrait, la formalisation mathématique. C'est le cas de l'enseignant (P37) qui estime que certaines notions physiques ne sont pas bien exploitées :

> « *En physique on essaie de déterminer la variation d'une grandeur sans avoir nécessairement besoin de l'équation différentielle. En mathématiques, on passe à la limite en s'appuyant si possible sur une activité de sciences physiques comme la radioactivité* ». (P37)

L'enseignant (P31) quant à lui, pense que le manque d'harmonisation des notations sur les notions qui sont vues à la fois en mathématiques et en physique perturbe les élèves surtout si ces notions ont été déjà traitées en mathématiques :

> « *La signification physique des petites variations conduit naturellement à la notation différentielle. Notre gros souci concerne cette notation (...) qui perturbe les élèves si les équations différentielles ont été vues en mathématiques d'abord. Les premières équations étudiées sont assez triviales et il suffit à nos élèves de connaître les propriétés des exponentielles et des logarithmes* » (P31)

<u>Un enseignement simultané</u>

Concernant un enseignement des équations différentielles en simultané entre les mathématiques et la physique, 17 sur 50 enseignants sont favorables pour cette option.

Les principales raisons avancées pour soutenir cette position peuvent être vues en faveur de l'interdisciplinarité :

> « *C'est une démarche interdisciplinaire complémentaire et enrichissante. Il s'agit de montrer et de perpétuer l'interaction forte entre les mathématiques et la physique. C'est une autre façon de mettre en œuvre la dualité théorie/ pratique nécessaire et favorable pour les apprentissages* » (P49).
>
> « *Aborder les équations différentielles simultanément permet de travailler sur un même exemple concret pour le collègue de mathématiques (ici la radioactivité) et lui me permet d'utiliser la fonction exponentielle sans la faire découvrir aux élèves.* » (enseignant P3)

<u>Indépendamment</u>

Nous comptons 2 enseignants qui pensent qu'il importe peu de donner une "priorité" de traitement des équations différentielles à une discipline.

Question 5 : *Travaillez-vous, sur ce thème, conjointement avec les collègues de mathématiques*

La majorité des enseignants (30 sur 50) disent avoir travaillé avec leurs collègues mathématiciens. Ces réponses peuvent être classées selon trois catégories en fonction de la manière dont le travail conjoint est mené :

- harmonisation des contenus :

Une concertation pour harmonisation évoquée par 8 enseignants ; mais l'harmonisation dont il s'agit porte sur les notations ou symboles et le langage à adopter. C'est le cas de (P39) qui parle de :

> *« sur la présentation, sur l'écriture et l'introduction de cette notion »*

ou bien de (P24) qui parle d'une harmonisation des approches

> *« accord préalable sur l'approche, les notations »*

- organisation de la progression

L'idée d'organisation sur la progression et le moment de présenter les équations différentielles rejoint celle d'harmonisation. Cette raison est évoquée par 15 enseignants ; c'est le cas de (P3) :

> *« je fais le cours de radioactivité jusqu'à l'écriture de l'équation différentielle de désintégration. Ma collègue de mathématique se sert alors de cette loi pour introduire la fonction exponentielle et la méthode d'Euler en travaux dirigés. Je peux ensuite reprendre le cours en donnant la solution de l'équation différentielle de désintégration radioactive »*

ou de (P5) :

> *« informations sur le calendrier, questionnement sur les difficultés des élèves »*

Ou encore de (P21) qui va jusqu'à fournir des exercices à son collègue de mathématiques.

Mais des difficultés sont signalées sur la mise en œuvre d'un travail conjoint. C'est ce que dit l'enseignant P10

> *« Pas toujours possible dans la progression mais la manière de présenter »*

ou de (P12) qui pense que

> *« cela dépend des profs de maths car ils ne sont pas tous ok (les maths ne sont pas un outil pour la physique, etc.)* (P12)

- articulation et choix des activités :

7 enseignants parlent d'un travail d'échange d'informations et de réflexion « didactique » commune. On peut citer l'enseignant (P17) qui souligne par ailleurs les difficultés d'une approche conjointe :

> *« oui nous essayons ... Mais ce n'est pas facile à mettre en œuvre ... Lors d'une séquence de physique à propos du circuit RC, nous avons tenté cette année avec ma collègue de math de l'animer ensemble : nous avons étudié expérimentalement la charge d'un condensateur. Après avoir obtenu la courbe, nous avons mis à l'épreuve le modèle en utilisant la loi des mailles pour in fine obtenir l'équation différentielle. La collègue de math a ensuite entrepris un*

travail de résolution, d'abord par la méthode d'Euler, puis classiquement. Nous n'avons pas été très satisfaits de cette séquence mais nous pensons la reprendre en essayant de tirer partie de cette première expérience » (P17)

L'enseignant P26 a partagé dans sa classe, avec son collègue de mathématiques, une expérience similaire à celle de (P17) citée plus haut. Lui aussi (P26) parle d'un travail non satisfaisant pour les deux enseignants (et sans doute pour leurs élèves) :

> « *il serait préférable de réussir à trouver « un véritable consensus » au niveau institutionnel entre physiciens et mathématiciens sur la notation* » (P26)

S'agissant des 20 enseignants ayant répondus non, 6 enseignants sont favorables à un travail conjoint, mais pensent que le dialogue est impossible à cause de la rigueur « mathématique » imposée par leur collègue de mathématiques qui surtout, ne veulent pas modifier leur programmation.

> « *il ne m'est pas possible d'organiser un travail commun avec ma collègue de math, qui n'accepte pas de modifier sa progression* » (P2)

Quant aux 14 autres restants, ils n'ont pas justifié leurs réponses.

Par ailleurs, afin de mieux cerner la manière dont les enseignants perçoivent les intentions didactiques des programmes qui les incitent à mener un travail conjoint, il nous a paru nécessaire de croiser les réponses à la question 5 à celles obtenues à la question précédente (question 4). Nous proposons un tableau à double entrée qui permet d'indiquer à la fois, le nombre d'enseignants ayant travaillé conjointement ou non avec leurs collègues de mathématiques (question 5) et le choix de ces enseignants de leur préférence sur la priorité de traitement des équations différentielles entre les mathématiques et la physique.

	Oui	Non
Mathématiques	13	15
Physique	4	1
Simultanément	12	3
Indifférent	1	1

Tableau 34 : Répartition des enseignants en fonction de leur préférence sur l'introduction des équations différentielles

Par soucis de synthèse, nous interprétons les résultats du tableau en termes de couple. Par exemple le nombre 13 correspondant au couple (mathématiques ; oui) signifie qu'il y a 13 enseignants qui préfèrent que les équations différentielles soient d'abordent traiter en mathématiques et qui ont travaillé conjointement avec leurs collègues mathématiciens.

Le tableau 34 donne des indications sur le point de vue des enseignants concernant les orientations du programme sur l'articulation entre la physique et les mathématiques sur les équations différentielles. Nous considérons que les 12 enseignants correspondant au couple (simultanément ; oui) sont favorables à un enseignement coordonné des équations différentielles entre les mathématiques et la physique. À cette catégorie d'enseignants, on peut y associer les 13 enseignants relatifs au couple (mathématiques ; oui). Nous qualifions ces enseignants de « physique-matheux », qui correspond à la catégorie que nous avons appelée « matheux-physique » dans le questionnaire de mathématiques (Cf. tableau 26).

Nous rappelons que parmi les 15 enseignants du couple (mathématiques ; non), on compte 6 enseignants qui se sont exprimés en faveur d'un travail coordonné entre les enseignants des deux disciplines et 9 enseignants qui n'ont pas commenté leurs réponses. De même, tous les 3 enseignants du couple (simultané ; non) sont favorables à un travail conjoint comme l'exprime l'enseignant (P7) :

> *« Cela dépend de mon collègue, mais généralement, j'en ai besoin* [en parlant des équations différentielles] *avant qu'il n'ait le temps de le traiter »* (P 7)

Aussi, nous rappelons, d'après la question 4, que 5 enseignants qui pensent qu'il est préférable d'aborder les équations différentielles en physique avant les mathématiques. Parmi eux 4 enseignants ont déclaré avoir travaillé avec leurs collègues de mathématiques. Nous les qualifions de « physicien » en fonction des commentaires qui accompagnent leurs réponses :

> *« En <u>communiquant</u> aux profs de maths ma démarche et en <u>demandant</u> que différents points du programme de maths (fonction log, exp, probabilité, equa diff) soient abordés de façon pragmatique : le sujet de maths du bac S 2004 est d'ailleurs intéressant de ce point de vue... »* (P12)

Les verbes "communiquer" et "demander" employés par cet enseignant ne semble pas exprimer l'idée d'une attitude coopérative. Le pragmatisme auquel cet enseignant fait allusion est sans doute à relier à une démarche privilégiant une approche physique des phénomènes. Cependant les explications (très brèves) que cet enseignant donne en réponse à la question 4 ne semblent pas traduire cette idée. Pour lui, il est préférable d'aborder d'abord les équations différentielles en physique :

> *« pour avoir une approche pragmatique du problème : en introduisant la méthode d'Euler avec la radioactivité et/ou RC et/ou RL où des solutions analytiques simples peuvent être obtenues, on peut comparer les deux méthodes et appréhender plus facilement les limites d'Euler (choix de l'incrément, etc.) »* (P12)

Pourtant, ce qu'il explique : « *introduire la méthode d'Euler avec la radioactivité* » ou bien « *comparer les deux méthodes* [analytique et numérique] » relève de l'activité mathématique. Peut-être qu'il faut comprendre cette démarche (pragmatique) par « pratique » comme l'exprime l'enseignant (P21) :

> « *Nous fournissons des exercices pratiques* » (P21)

En somme, à l'instar de l'analyse des réponses du questionnaire adressé aux professeurs de mathématiques où nous avons classé les enseignants en deux catégories, nous retrouvons ici la même configuration avec d'une part les « physiciens » (ils sont 4) que l'on peut opposer aux « matheux » (dans le questionnaire maths) et les « physiciens-matheux » (au nombre de 34[73]) qui correspondent aux « matheux-physicien » ;

d) L'importance d'un enseignement des équations différentielles au secondaire

Question 6 : *Quelle est selon vous l'importance d'un enseignement portant sur les équations différentielles dans une formation scientifique générale du secondaire ?*

Nous regroupons dans le tableau ci-dessous l'ensemble des réponses recueillies pour cette question.

Très important	Assez important	Peu important	Sans intérêt
32	15	3	0

Tableau 35. Importance accordée aux équations différentielles

L'intérêt/importance d'un enseignement des équations différentielles dans l'enseignement secondaire est approuvé par une majorité d'enseignants. 32 enseignants sur 50 enseignants pensent que l'enseignement des équations différentielles est très important, 15 jugent qu'il est assez important contre 3, qui pensent que c'est un enseignement peu important.

Par ailleurs, par rapport à la question précédente, parmi les 32 (constituant la majorité) enseignants ayant répondu « très importants », on compte tous les 4 enseignants « physiciens », 25 « physiciens-matheux » et 3 enseignants qui ne se sont pas exprimés avant (croisement questions 4 et 5). Ceci veut dire que l'on ne retrouve dans les autres catégories de réponses qu'une répartition des « physiciens-matheux ».

[73] Nous ne comptons pas les sans réponses qui sont au nombre de 12.

On peut néanmoins signaler la convergence des 3 réponses des enseignants ayant répondu « peu importe ». En effet, ces trois enseignants ont tous répondu :

- « mathématiques » à la question 4 sur la préférence (dont une seule réponse justifiée[74]),
- « non » à la question 5 sur le travail conjoint avec leurs collègues mathématiciens.

On pouvait supposer que ces enseignants font partie de la catégorie de ceux qui ne semblent pas être satisfaits de la manière dont les équations différentielles sont utilisées en physique. Mais en raison du nombre (trop petit) de réponses, on n'en reste qu'à des suppositions.

e) L'enseignement des équations différentielles et les nouvelles technologies de l'information et de la communication

Question 7 : *« Utilisez-vous des moyens informatiques lorsque vous traitez des équations différentielles? »*

Les enseignants interrogés utilisent tous les outils informatisés sauf un. Sa réponse faisait référence aux années antérieures puisqu'il pense s'y mettre (cette année-ci).

> *« je compte cependant cette année faire une acquisition de positions du centre d'inertie d'une en chute dans de l'huile, puis, grâce au tableur Excel, faire tracer v = f(t) »* (P9)

Tous les autres (c'est-à-dire 49) ont accès à l'ordinateur et l'utilise pour le traitement des équations différentielles. En revanche, ils sont 14 seulement qui à utilisent la calculatrice (en plus de l'ordinateur).

Question 8 : *Les moyens informatisés permettent a priori une nouvelle approche et/ou un nouveau regard sur les équations différentielles. Pensez-vous que ceci constitue plutôt une aide ou plutôt une difficulté supplémentaire : Pour l'enseignant / pour l'élève*

Pour cette question, les enseignants avaient la possibilité de choisir plusieurs réponses. Le tableau ci-dessous donne la synthèse des réponses des enseignants à la question 8

	Pour les enseignants	**Pour les élèves**
Aide	40	38
Difficulté	34	18
Sans réponses	5	

Tableau 36. Réponses des enseignants sur la relation entre les équations différentielles et les TICE

- L'enseignant

[74] Il s'agit de l'enseignant P2

On compte 40 enseignants qui disent que les outils informatisés sont une aide pour l'enseignant contre 34 qui pensent que ces outils constituent une difficulté pour les enseignants.

Remarque : signalons que parmi les 78 (= 40 + 38) réponses recueillies concernant l'enseignant, il y a 29 réponses qui disent que ces outils peuvent être soit une aide, soit une difficulté pour les enseignant.

Examinons les raisons avancées pour justifier les réponses, en soulignant que parmi les réponses recueillies il y en a 19 qui ne sont pas justifiées.

Aide pour les enseignants :

Plusieurs raisons sont avancées pour les réponses justifiées ; nous les avons regroupées en deux catégories. Nous qualifions la première de "technique" (avancées par 10 enseignants) et la seconde, de "didactique", (données par 16 enseignants) :

Raisons techniques ou efficacité technologique :

Les outils informatisés offrent une rapidité sur le traitement des données ce qui fait gagner du temps à l'enseignant (P1 et P9 parle de l'aide dans le cas de « *calculs répétitifs* »), et lui permet de montrer la nécessité des méthodes numériques :

> « *cela permet de pout l'équation en* v^2 *que dans la plupart des cas seule une méthode numérique permet d'obtenir des résultats* » (P11)

> « *sans tableur, impossible de traiter la méthode d'Euler sur un grand nombre de points* » (P12)

ou bien de multiplier des exemples :

> « *les méthodes numériques assistées par le tableur sont rapides et permettent de multiplier les exemples traités* » (P30)

Raisons didactiques :

Nous les résumons en ces termes : ces outils (informatiques) permettent la superposition des courbes solutions. L'intérêt didactique d'une telle potentialité dans la résolution numérique des équations différentielles est de montrer vite l'importance du choix du pas de calcul et de valider le modèle traduit par les équations différentielles. Ils permettent de comparer les solutions analytiques et approchées. C'est une approche plus "concrète" comme en témoignent les réponses suivantes :

> « .... *il* [l'outil informatique] *permet donc une approche plus concrète des équations différentielles, donc des phénomènes physiques qui se cachent derrière les équations différentielles* » P15 :

> « *la méthode d'Euler conforte le sens physique d'une équation différentielle : résolution pas à pas, petites variations ..., notions difficiles dans l'abstrait d'une fonction mathématiques, solution de l'équation, mais dont on ne sait pas d'où elle sort au niveau de la terminale. D'autre part, l'outil informatique permet de tester rapidement différents modèles (frottements en kv ou kv^2)* » (P15)

ou bien l'enseignant P17 :

> « *ces moyens* [informatiques] *permettent d'effectuer des activités plus attractives et de mettre en place ces équations différentielles dans sans trop d'outils mathématiques (ce qui rebute les élèves en général).* » (P17)

ou encore P21 :

> « *...de même pour Euler, il est fascinant pour les élève de « voir », de nouveau, qu'une écriture différentielle sur une petite durée permet d'obtenir un modèle correct du phénomène sur une durée longue, si on respecte quelques contraintes de calcul* » (P21)

Il en résulte que l'approche informatique des équations différentielles à la charnière des deux disciplines permet de compléter, à travers l'utilisation de la méthode d'Euler et d'un tableur-grapheur, "le point de vue" mathématique des équations différentielles en classe de terminale (voir P17) et le point physique : simulation des phénomènes et confrontation entre théorie et réalité : (voir P21 ou P33) :

> « *ce n'est pas vraiment pour traiter les équations différentielles : uniquement pour confronter la théorie à l'expérience et vérifier que le modèle correspond bien aux résultats expérimentaux obtenus par les élèves par acquisition direct avec une interface (orphy GTS 2)* » (P33).

<u>Difficulté pour l'enseignant</u>

Nous comptons 34 réponses qui disent que ces outils constituent une difficulté supplémentaire pour les enseignants. Les raisons évoquées sont rattachées à la maîtrise de l'outil informatique. En effet, dans le cours de physique, les difficultés peuvent venir du fait qu'en dehors des notions physiques à acquérir, les enseignants doivent avoir une maîtrise des notions mathématiques utilisées dans leurs cours et des logiciels utilisés.

> « *la maîtrise de l'outil informatique (vidéo, codec, Excel) reste un souci pour certains* » (P7)

<u>Aide pour les élèves :</u>

L'essentiel des raisons évoquées plus haut (aide pour l'enseignant) sont retrouvées (38 réponses). L'enseignant (P32) trouve l'intérêt (didactique/pédagogique) des ces outils informatiques dans la multiplicité des registres sémiotiques :

> « *Permet de varier les registres sémiotiques utilisés, donner du sens à l'équation différentielle en montrant comment on peut résoudre par méthode itérative* » (P32)

L'enseignant P22 voit l'efficacité de ces outils dans la construction des savoirs de l'élève :

> *« écrire une ligne de calcul, prévoir l'agencement d'un tableau de calcul, permettent à mon avis à l'élève de construire son savoir, notamment sur la méthode d'Euler »* (P 42)

Difficultés pour les élèves

Concernant les élèves, 18 enseignants pensent que les outils informatiques constituent une difficulté pour leurs élèves. Les raisons évoquées (pour un enseignement de la physique par une approche informatique) sont liées à la maîtrise du logiciel. Pour l'enseignant (P2), les élèves n'ont « *aucune maîtrise de l'informatique* ». P10 aborde dans le même sens :

> *« Maîtrise incomplète de l'outil informatique que l'on met en place depuis la classe de seconde et que l'on va renforcer compte tenu des difficultés rencontrées »* (P 10).

Mais les réponses de (P6) ou de (P36) sont plus nuancées en précisant qu'il y a difficulté chez les élèves qui ne maîtrisent pas l'outil informatique :

> *« Tous ne possèdent pas encore l'outil informatique et l'utilisation d'un tableur est parfois difficile pour certains »* (P6)
>
> *« Les élèves doués en informatiques comprennent mieux le principe de la méthode d'Euler, mais pour les autres (majoritaires) la difficulté de programmation (réalisation d'une boucle) efface complètement la physique ... »* (P36)

Les élèves n'ayant pas une pratique plus courante des outils informatisés s'en sortent moins bien. Il y a aussi le risque de voir certains élèves s'intéresser plus à l'ordinateur plutôt qu'à l'objet d'apprentissage.

On peut aussi s'étonner de l'absence de considérations quant aux difficultés liées au "traitement numérique" (dérivation numérique par exemple) (Beaufils 1992).

f) Pertinence scientifique

Question 9 : *L'introduction des approches informatisées vous paraît-elle pertinente / légitime sur le plan scientifique ?*

Sur cette question, 45 enseignants pensent que l'approche informatisée d'un enseignement des équations différentielles est légitime et pertinente dans l'enseignement au secondaire ; comme dans le questionnaire "mathématiques", les raisons en sont multiples :

Efficacité technologique :

La puissance de l'informatique permet un gain de temps et un traitement des problèmes plus complexes. Il s'agit aussi de montrer l'importance, l'intérêt premier de l'informatique en évitant des calculs fastidieux et des tâches répétitives. C'est comme l'enseignant[75] P5 qui parle des possibilités qu'offrent les outils informatiques pour :

[75] Pour les citations sur l'efficacité des outils informatiques, on peut se référer à la question précédente.

> « *la multiplication des situations rencontrées en un temps raisonnable, la simulation ; garder à l'esprit l'intérêt premier de l'informatique : éviter les calculs et tâches répétitives* » (P5).

Raisons pédagogiques (sur l'approche informatique.)

> « *Elle permet d'aller plus loin et plus vite ; elle est légitime à condition d'être confrontée à l'expérience. D'ailleurs c'est le résultat des expériences qui permet d'ajuster les paramètres de la simulation pour que celle-ci colle au plus près à la réalité* » (P15)

> « *Elle nous offre des possibilités nouvelles en nous permettant d'étudier des phénomènes physique dans leur complexité, sans avoir à nous soucier du niveau de nos élèves en mathématiques. Nous ne sommes plus réduits à des modèles utilisant des fonctions « simples » et nous pouvons tenir compte de paramètres comme les frottements et aboutir à n'importe qu'elle équation différentielle, dont l'ordinateur calculera une solution numérique* ». (P21)

> « *Cette approche permet de faire de la physique concrète et non de la physique aseptisée ou compliquée comme nous le faisons avant (table à coussin d'air ...)* (P42)

On peut aussi citer (E3) qui voit le rôle des outils informatiques dans la modernisation de l'enseignement des sciences physiques :

> « *Modernisation de l'enseignement de la physique nécessaire pour dynamiser et motiver les élèves. L'informatique est incontournable et utilisée à bon escient peut être très pédagogique ... » (P3)*

Signalons que 7 enseignants (parmi les 45) précisent que l'approche informatique est d'autant plus la pertinence/efficace que si le travail donné à l'élève ne se réduit pas à une simple manipulation de l'ordinateur et des logiciels ; citons par exemple (P33) :

> « *... mais il ne faut pas perdre de vue l'intérêt didactique et il ne faut pas se noyer dans des problèmes « techniques » qui peuvent par moment occulter le véritable sujet d'étude si l'outil n'est pas parfaitement adapté* ». (P33)

Nous pouvons enfin dire que les réponses recueillies sur les questions 8 et 9 donnent des indications sur la place de l'informatique dans l'enseignement de la physique. Il apparaît que les mathématiques ne sont plus les seules à fournir des outils à la physique ; désormais, il faut aussi ajouter l'informatique dans le rôle de discipline "fournisseur d'outils".

Signalons aussi, par ailleurs, que l'approche informatique choisie pour aborder des situations modélisées par une équation différentielle ne va pas toujours dans le sens des renforcements des liens entre les mathématiques et la physique. Cette approche est révélatrice du caractère envahissant (peut-être trop envahissant) des mathématiques dans l'enseignement de la physique. C'est dans ce sens que nous comprenons les propos des enseignants (P21) (voir paragraphe "raisons pédagogiques") ou et (P28) qui pensent que l'informatique permet de « *garder l'aspect des phénomènes sans être débordés par les mathématiques* »

L'intérêt pour la vie future d'une introduction de l'approche informatique n'est cité que par deux enseignants :

« *Légitime : en recherche scientifique, l'outil informatique est largement utilisé* ». (P9)

Parallèlement au questionnaire « mathématiques », on peut constater une similarité des (catégories de) réponses recueillies pour cette question. La question n'a pas été comprise par la plupart des enseignants, sans doute - comme nous l'avons indiqué plus haut- "obnubilés" par l'enseignement, ils n'ont pas compris que la question portait sur la pertinence "scientifique".

On peut aussi constater qu'aucune référence au à la certification (C2i) n'a été mentionnée.

II.3. Conclusion sur l'analyse du questionnaire

Organisation et gestion des programmes

Pour ce qui concerne l'organisation et la gestion des programmes, nous constatons qu'aucune différence entre « anciens » et « nouveaux » enseignants n'apparaît dans les réponses apportées (en mathématiques et en physique) qu'il s'agisse des interactions entre les mathématiques et la physique, de la place des TICE pour l'enseignement des équations différentielle ou de l'importance d'un enseignement des équations différentielles.

On peut considérer que pour la plupart des enseignants, l'organisation et de la répartition annuelle des enseignements concernant les équations différentielles semblent être une conformité aux programmes scolaires : on a compté 40 en mathématiques et 36 en physique qui justifient leur organisation par des raisons institutionnelles.

Quant à la continuité didactique, elle semble être perçue par quelques enseignants comme une nécessité pour l'enseignement des équations différentielles. On compte 27 enseignants en mathématiques et 12 en physique qui ont évoqués la « *"cohérence avec d'autres enseignements* » comme principale motivation de leur choix dans l'organisation et la gestion des programmes.

La place de la méthode d'Euler.

La méthode d'Euler a été introduite dans les programmes des deux disciplines (mathématiques et physique) pour renforcer les liens entre les mathématiques la physique et les TICE. Mais cela ne semble pas être suivi d'effet dans la pratique des classes.

En mathématiques, on a noté que certains (2) enseignants ne traitent pas la méthode d'Euler alors que d'autres (6) ne nous ont pas renseigné s'ils traitaient ou non cette méthode. Le caractère marginal donné à cette méthode peut être justifié par le fait qu'elle n'este soit pas une connaissance exigible au baccalauréat, ou bien le fait qu'elle impose d'utiliser des outils informatiques qui ne sont pas maîtrisés par beaucoup d'enseignants. Il ressort des réponses des enseignants (de mathématiques) que cette méthode est vite présentée aux élèves en classe de première et, qu'en terminale, les enseignants ont l'impression que leurs élèves n'ont jamais entendu parler de cette méthode. Ils sont alors obligés eux aussi de la traiter très tôt parce que le professeur de physique en a besoin.

Cependant en physique, cette méthode est utilisée par tous les enseignants interrogés. Elle est très intégrée (peut être trop même, puisqu'on en oublie l'objet équation différentielle même) et que cela vient du fait que les méthodes informatisées étaient déjà bien implantées en physique.

Au demeurant, il semble apparaître une ignorance mutuelle entre les pratiques de certains enseignants des deux disciplines à propos de la méthode d'Euler : la plupart des enseignants des mathématiques n'ont pas de retour sur l'utilisation de cette méthode en physique ; de même, certains enseignants en physique n'attendent pas que leurs collègues mathématiciens abordent la méthode d'Euler.

Cette ignorance sur ce que chacun fait dans sa classe, ne se limite pas seulement aux cas des de la méthode d'Euler mais concerne globalement le traitement des équations différentielles).

Interaction mathématiques -physique

L'analyse des réponses a fait émerger de vieilles questions à propos de la relation entre les deux disciplines : mathématiques d'abord ; physique comme support ; mathématiques discipline de service ...

Ainsi, en fonction des réponses on a pu regrouper les enseignants deux catégories :

- ceux qui sont d'accord sur la continuité didactique telle que décrite dans les programmes. Ce sont les plus nombreux. Pour les professeurs de mathématiques, nous avons identifié 31 et nous les avons appelés « matheux-physiciens ».

Remarque : pour les professeurs de physique, nous avons identifié 25 et nous les avons appelé « physiciens-matheux ». Il est important de signaler que pour les enseignants de cette catégorie, du moins pour ceux qui ont affirmé avoir eu des contacts avec leurs collègues de l'autre discipline, le travail entrepris dans la plupart des cas, n'a pas porté sur une réflexion fine de nature didactique. La volonté d'entreprendre une réflexion commune à l'introduction des équations différentielles est manifeste chez la plupart des enseignants qui approuvent l'intérêt didactique d'une telle approche. Mais les enseignants évoquent plusieurs difficultés pour mener à bien cette expérience de vision croisée (manque de temps, difficultés à accorder les points de vue ...).

- ceux qui ne sont pas d'accord de avec la continuité didactique mais pensent que les équations différentielles devraient être abordées autrement que par la façon dont elles sont présentées dans les programmes actuels des deux disciplines. En mathématiques, nous en avons identifiés 8 et nous les avons qualifiées de « matheux ». En physique, nous en avons identifié 4 et nous les avons qualifiés de « physiciens ».

On voit ici la différence de positionnement entre les enseignants des deux disciplines que nous caricaturons comme suit :

- les physiciens ont besoin de mathématiques, mais les matheux paraissent être auto-suffisants et ne pas avoir besoin de physique
- les physiciens savent se débrouiller sans nous (matheux) et n'ont pas besoins de nous

La place des TICE :

D'après les réponses reçues, l'apport des outils informatiques est approuvé par la majorité d'enseignants. Les arguments avancés, pour dire que ces outils peuvent constituer (ou sont) une difficulté pour l'élève/l'enseignant, tournent autour de la maîtrise de l'outil informatique. Par exemple, des difficultés liées à la transposition informatique, dans un environnement tableur-grapheur, des connaissances mathématiques (notion d'approximation, la méthode d'Euler, limite ...) ou des connaissances de la physique (interprétation du temps caractéristique) ne sont presque pas évoquées.

III. Entretiens : présentation et analyse des réponses

Le suivi des enseignants a pour but un accès plus fin que les questionnaires à la perception de la continuité didactique entre les deux institutions que constituent l'enseignement des mathématiques et de la physique. Il permet de cerner la question de la prise en compte de l'autre discipline dans les pratiques des enseignants mais aussi celle de la place et du rôle des outils informatiques pour la continuité didactique. Précisons d'emblée qu'il ne s'agit que de quelques entretiens visant une prise de contact plus directe, et non pas la constitution d'un corpus important.

III.1. Critères de choix et profils des enseignants

Les enseignants interviewés enseignent tous dans des lycées de la région parisienne en classe de terminale S. Ce sont 3 enseignants pour les mathématiques et 3 enseignants pour la physique. Nous avons fait le choix restrictif de nous intéresser aux deux enseignants qui interviennent dans une même classe ; ceci pour cerner le type de relations entretenues entre les deux enseignants et leur position vis-à-vis de la continuité didactique. Dans chaque discipline nous avons aussi choisi un enseignant qui enseigne depuis plusieurs années en terminale (qui a donc connu plusieurs programmes) et un plus "jeune" qui n'a connu que les nouveaux programmes (ceux de 2002). Nous rappelons que notre analyse du questionnaire ne nous avait pas permis de relever de différence entre les "anciens" et les "jeunes" enseignants.

(Pour des raisons déontologiques, les prénoms des enseignants ont été modifiés).

Pour la classe A, les enseignants sont Gilberte en mathématiques et Joël en physique

Pour la classe B, les enseignants sont Olivier en mathématiques et Florence en physique.

Pour la classe C, les enseignants sont Christian en mathématiques et Véronique en physique.

Dans ce qui suit, pour des raisons matérielles les enregistrements concernant la classe C n'ont pu être exploités. Nous ne présentons donc pas le travail réalisé par les deux enseignants de cette classe.

III.2. Présentation générale des entretiens

Le premier entretien a eu lieu en fin mars 2004 pour les enseignants de la classe A ; le deuxième, un peu plus tard pour la classe B (début avril). Enfin le dernier entretien a eu lieu en mai 2005 pour les enseignants de la classe C.

Chaque entretien a été d'une durée d'une heure environ. Chacun comportait systématiquement quatre parties :

Introduction : c'est la phase de présentation de la recherche et de la problématique.

Questions "intra-mathématiques" pour les mathématiques et "intra-physique" pour la physique. Les questions portent sur la place des équations différentielles par rapport à la discipline concernée.

Questions sur la relation entre les mathématiques et la physique ; le but est de cerner le point de vue des enseignants sur la continuité didactique.

Conclusion : pour faire réagir les enseignants sur l'ensemble des questions posées et sur d'autres aspects concernant l'enseignement des équations différentielles qui ne sont pas apparus au cours de l'entretien.

III.2.1. Entretiens pour la classe A

a) Mathématiques

Gilberte enseigne les mathématiques en terminale depuis 10 ans. Nous résumons dans ce qui suit, ses réponses aux différentes questions.

Question 2. Dans le programme actuel de mathématiques, la notion d'équation différentielle est très liée à la notion de fonction exponentielle.
Comment introduisez-vous chacune de ces notions ?

Gilberte fait tout de suite remarquer le caractère indissociable de la fonction exponentielle et de l'équation différentielle selon le programme actuel. Elle introduit la fonction exponentielle d'abord en s'appuyant sur la notion de suites numériques, sur la méthode d'Euler et sur l'équation différentielle du premier ordre :

> « *La fonction exponentielle est une solution d'une équation différentielle avec une condition initiale particulière et nous commençons par la dessiner grâce à la méthode d'Euler. On a besoin, nous, des suites, donc d'introduire avant le vocabulaire et les méthodes de convergence des suites* »

Elle précise une nouveauté par rapport aux anciens programmes :

> « *Là ce qui est nouveau c'est qu'à partir d'un problème physique on bâtit une notion mathématique nouvelle. C'est ça ce qui est nouveau* ».

Question 3. Quelles sont les difficultés rencontrées par les élèves ?

Pour les difficultés Gilberte en pointe deux principalement : la non-maîtrise des suites numériques et le fait de concevoir l'existence d'une fonction à partir d'une manipulation numérique et graphique :

> « *les principales difficultés sont qu'ils ne maitrisent pas l'outil des suites mathématiques. C'est très difficile de parler de méthode d'Euler quand ils ont très peu fait de suites en première* »

> « *... ils ont beaucoup de mal à concevoir l'existence d'une fonction par un dessin. Puisque c'est comme ça qu'on la prouve, elle existe parce qu'on la voit, on la dessine point par point* »

D'ailleurs plusieurs recherches en didactique des mathématiques montrent que cette dernière difficulté citée par Gilberte est liée à la conception étroite qu'ont les élèves de la notion de fonction : "une fonction est donnée par une formule qui donne $f(x)$".

Question 4. À l'issue des cours sur cette partie du programme, que doit représenter à votre avis pour l'élève l'expression "équation différentielle" ?

Pour Gilberte, le mot "équation différentielle" fait déjà peur aux élèves, ce qui montre qu'ils ne retiennent pas grand-chose à la fin du cours et c'est à cela qu'il faut travailler. Cette peur est due en partie, à la complexité des situations de modélisation qui font intervenir d'autres types d'équations différentielles qui ne sont pas étudiés en classe :

> *« Ça leur fait très peur parce que, en fait ils ne voient qu'un modèle d'équation différentielle, celle qui donne l'exponentielle et en général les problèmes la compliquent avec un second membre avec une fonction dépendant de la variable ... »*

Un travail doit se faire, selon Gilberte pour montrer l'importance des équations différentielles pour les autres sciences.

Question 5. L'utilisation de l'approche numérique et des instruments informatisés (ordinateur ou calculette) vous paraît-elle une aide ? (Ou bien est-ce l'introduction d'un nouveau "point de vue" : le point de "l'informaticien" ?)

Gilberte précise qu'elle n'utilise que la calculatrice pour travailler la notion de fonction exponentielle à l'aide de la méthode d'Euler.

> *« Je ne me sers pas de l'ordinateur. par ce qu'il faut se déplacer dans une salle, je trouve que c'est du temps perdu quand on a trente quatre élève en terminale, un gros programme à faire, ... la calculatrice... c'est le moins possible pour mon cours ».*

Elle souligne tout de même les grandes réticences des élèves au début par rapport aux difficultés engendrées par l'outil.

> *« Ils ont tendance à utiliser l'outil calculatrice très vite, trop vite pour tout, comme une aide aux formules, une vérification de calculs j'essaie alors de leur apprendre à distinguer entre l'antisèche et puis l'aide effective que peut donner la calculatrice comme vérification d'une hypothèse ou des choses comme ça »*

Les contraintes de temps imposées par le programme ne lui permettent pas de passer plus de temps sur le maniement de l'outil "calculatrice" en précisant aussi que cela l'éloigne des mathématiques.

Question 6. Selon le programme, l'introduction et l'utilisation des équations différentielles doivent être faites conjointement en mathématiques et sciences physiques. Travaillez-vous conjointement ou en collaboration avec votre collègue de physique ? Si oui, à quel moment du programme ?

Gilberte affirme être favorable à un travail conjoint avec son collègue de la physique en précisant que ce n'est pas toujours facile d'instaurer le dialogue avec certains collègues. Elle expose en quelques mots sa vision d'une articulation entre un enseignant de mathématiques et un enseignant de physique.

> *« Pour moi il faut qu'un enseignant* [de physique] *conçoive la partie mathématique de son programme et accepte de travailler premièrement en collaboration et deuxièmement accepte de se servir de l'outil mathématique avec la même rigueur qu'un mathématicien et ça tous les profs de physique ne le font pas ».*

Les parties du programme sur lesquelles elle a eu des contacts avec son collègue de physique concernent essentiellement la fonction exponentielle et la fonction logarithme. Le travail entrepris porte essentiellement sur l'harmonisation des notations, sur quelques échanges concernant les difficultés rencontrées par les élèves lors de l'étude des équations différentielles (difficulté à concevoir qu'une solution d'une équation est une fonction, étude des situations de modélisation, etc.).

Par ailleurs, Gilberte signale une incohérence de cette articulation entre les mathématiques et la physique. C'est le fait "d'apprendre" qu'en physique les équations différentielles du second ordre sont au programme en terminale alors qu'elles ne le sont plus dans les programmes de mathématiques.

> *« ... C'est dommage de faire disparaître des équations différentielles* [du second ordre] *qui n'étaient pas inaccessibles ou très difficile pour l'élève et donnaient aussi un support d'application non négligeable pour les mathématiciens... C'était une partie du programme agréable »*

Question 7. Dans les manuels scolaires, on trouve des exercices qui font référence à une question de physique (exemple ci-joint) ; utilisez-vous/favorisez-vous ce type d'exercices ? Si oui : tentez-vous de donner un sens physique au(x) résultat(s) de l'exercice ?

Gilberte affirme utiliser ce type de situation quand il y en une qui est proposée en activité préparatoire du manuel utilisé. Mais elle ne les propose pas quand elle passe aux exercices d'application pour la raison suivante :

> *« parce que le temps m'est compté pour finir le programme et je privilégie les exercices théoriques, méthodologiques qui pourra apprendre quelque chose d'universel à l'élève pour pouvoir décalquer dans un autre problème si vous voulez. Pour moi, en exercice, si j'ai du temps à la fin de l'année, par curiosité, on ira voir ce qui se passe ».*

Pour Gilberte, ces exercices de modélisation sont peu importants en terminale sauf pour montrer le lien entre les mathématiques et les autres sciences. Non seulement, il y a la contrainte temporelle due à la préparation au baccalauréat, mais Gilberte a l'impression de faire un peu de physique, où elle n'a pas toujours les compétences nécessaires, en ajoutant qu'elle n'est pas toute seule dans ce cas. Mais au-delà, il y a une satisfaction à traiter ces exercices de modélisation pour montrer la cohérence de la science :

> *« ... on arrive à leur faire accepter que la science est un tout et qu'il n y a pas un esprit mathématique, un esprit physique, un esprit biologique mais que derrière trois sciences qui sont enseignées au lycée il y a la même rigueur, il y a un esprit de rigueur à acquérir et que il n'y a pas de frontière »*

Question 9. L'étude des équations différentielles reste-t-elle difficile pour les élèves actuels de Terminale S ?

Gilberte revient sur quelques difficultés déjà soulignées plus haut (voir question 6). Mais elle poursuit en affirmant que malgré ces difficultés, il ne serait pas judicieux de supprimer des programmes cette partie importante des mathématiques.

b) Physique

Joël enseigne la physique dans la même classe que Gilberte ; il enseigne en terminale depuis 19 ans. Il précise, d'entrée de jeu (question 2), les parties du programme sur lesquelles il est amené à introduire les équations différentielles et ce, conformément au programme :

Question 2. Dans le programme actuel de physique, les équations différentielles se rencontrent en plusieurs points du programme.
À propos de quelle étude êtes-vous amené à introduire cette "notion" nouvelle ?

> *« je vais prendre le programme dans l'ordre, ça commence en fait en radioactivité, puis on a l'apparition des équations différentielles dans le circuit RLC, dans les circuits RL, RC et puis après en mécanique avec les chutes : on commence par les chutes verticales. Et puis on les retrouve dans les oscillateurs.*

Question 3. À cette époque de l'année, les élèves ont-ils vu les équations différentielles en mathématiques ?

La réponse de Joël à cette question montre qu'il n'est pas très au courant de ce font réellement ses élèves dans le cours de mathématiques à propos des équations différentielles (moment d'introduction).

> *« Par rapport au moment où on commence c'est un tout petit peu difficile ; je pense non ! »*

Comment alors gérez-vous l'introduction simultanée de nouvelles connaissances de physique et d'un nouvel "objet" mathématique ?

Voici sa réponse :

« Je crois je n'ai pas cherché à leur demander s'ils connaissaient, ça me paraissait être assez évident, c'est à dire que lors de la présentation, on montre qu'il y a la fonction et la dérivée de la fonction dans la même équation »

On peut comprendre par là que Joël donne très rapidement des explications sur le sens mathématique donné aux équations différentielles. Il précise par la suite que c'est à "l'essentiel" qu'il faut aller vite. L'essentiel est sans doute le sens physique de ces équations différentielles, leur importance dans l'étude des phénomènes physiques :

« Il ne faut pas oublier que le programme de physique –chimie est extrêmement volumineux en terminale et que les critiques fusent de partout pour dire qu'il faut diminuer le volume du programme. On essaie d'aller souvent au plus direct, pour privilégier certains aspects du programme, certains cheminements, certaines démarches. »

La contrainte « de finir le programme » pour la préparation au baccalauréat, qui s'impose à cet enseignant apparait comme un élément qui l'empêche d'avoir une vision plus large des acquis de ces élèves en mathématiques.

On peut ajouter que dans le passé, Joël avoue avoir échoué en tentant d'introduire avec une approche de mathématicien les équations différentielles dans son cours de physique :

« L'an dernier, j'ai voulu procéder comme en mathématique et faire de la physique dessus. C'est-à-dire, on a les coefficients, la forme générale c'est ça. Maintenant la physique nous impose qu'à t = 0 on ait ceci ; et lorsque t tend vers l'infini qu'on ait telle chose. Donc ça nous impose ceci, et les coefficients ..., du coup on fait retourner la manivelle et on arrive à tel résultat. L'an dernier ça été ça et ... les élèves étaient perdus, complètement perdus.

Cette année, je me suis dit, on va faire efficace. La première fois qu'ils ont rencontré les équations différentielles en physique ; ils ne l'avaient pas tout à fait encore rencontré en mathématiques, c'était à quelques heures près. Donc j'ai dit, voilà ... la solution, c'est ça. La fois suivante ... c'était dans le circuit RC. J'ai commencé à donner une petite ... où j'ai dit, vous avez remarqué ici que quand t tend vers l'infini alors ... physiquement on associe la tension tend vers E, mais donc la première fois, j'avoue qu'on n'a pas retrouvé les différents coefficients depuis le départ ».

Question 4. Quelles sont les difficultés rencontrées généralement par les élèves dans cette articulation maths-physique ?

La première difficulté citée par Joël est d'ordre psychologique : les élèves ont "peur" lorsqu'ils entendent parler des équations différentielles.

« je dirais que le terme leur fait un peu peur. A partir du moment où on leur dit voilà on a un outil mathématique à mettre en œuvre, ça les affole un peu. Je ne crois pas que ça soit dans la réalisation qu'ils ont des problèmes. C'est plus quasiment psychologique ».

Joël signale que cette peur est renforcée par le fait que les élèves ne reconnaissent pas souvent une équation différentielle donnée avec la notation mathématique. L'identification de la notation mathématique et sa traduction à la notion physique (ou inversement) n'est pas évidente. Il ajoute enfin qu'il serait souhaitable que les collègues de mathématiques introduisent dans leur cours des notations issues de la physique.

Question 5. En fin d'année scolaire, que doit représenter à votre avis pour l'élève l'expression "équation différentielle" du point de vue du "physicien" ?

Dans sa réponse, Joël fait une association entre l'équation différentielle et le phénomène à étudier. Pour lui, les élèves doivent savoir que si l'on arrive à trouver une équation différentielle, alors on pourra déterminer l'évolution du système. Mais Joël reconnait qu'il faut un peu de recul pour que les élèves de ce niveau arrivent à comprendre ce qu'ils font.

Question 6. L'utilisation de l'approche numérique (méthode d'Euler) et des instruments informatisés (ordinateur ou calculette) vous paraît-elle une aide ? Ou bien est-ce l'introduction d'un nouveau "point de vue" ("informaticien") qui vient se surajouter ?

Joël pense que l'introduction de la méthode d'Euler n'est pas a priori une aide pour les élèves. À ce sujet, il déclare marquer une rupture avec le programme :

> « *J'aime bien mettre la méthode d'Euler en œuvre pour ce qui est des mouvements. Je crois que c'est de là qu'il faudrait partir et pas comme indiqué dans le programme ...à partir de la radioactivité ou là, c'est une partie extrêmement ardue, extrêmement difficile. Même pour les circuits électriques* »

La rupture signalée par Joël ne se justifie pas car la progression qu'il suggère sur le lieu d'introduction de la méthode d'Euler est bien celle proposée par le programme actuel de physique. En effet, le lieu d'apparition de la méthode d'Euler dans les programmes et dans les documents d'accompagnement desdits programmes est bien la mécanique (dans le cas de l'étude d'un corps en chute verticale avec frottements). Il n y a donc pas rupture à ce niveau.

Question 7. L'introduction et l'utilisation des équations différentielles doivent être faites conjointement en mathématiques et sciences physiques.

Proposez-vous des sujets d'exercices de physique à vote collègue de mathématiques ?

> « *Proposer non. Par contre, comme on se croise assez souvent, il m'est arrivé de lui dire j'ai traité de ceci, de cela, j'ai telle réaction des élèves* ».

Les relations entre Joël et sa collègue de mathématiques se limitent à des discussions de "couloir". Il ne fait donc pas de propositions d'exercices à son collègue

Question 8. Les équations différentielles du second ordre ne sont plus au programme de mathématiques, mais sont utilisées en physique : cela ne constitue-t-il pas une incohérence dans l'articulation mathématiques-physique?

Joël ne voit pas là d'incohérence.

> *« Incohérence, non pas forcement puisqu'il y a, ...on parlait de sens tout à l'heure, l'équation différentielle qu'elle soit du premier ordre, du deuxième ordre, coefficient constant ou pas, au-delà nous en physique on est très limité.... Je dirais, que ça ne me paraît pas dramatique d'être traité en profondeur en mathématiques ».*

Sa réponse traduit bien une certaine cohérence avec la réponse apportée à la question 3. Hormis la lourdeur du programme de physique signalée par Joël, on peut considérer que ce que Joël donne à ses élèves en apport théorique complémentaire est minimum (peut-être suffisant) pour la compréhension de son cours, au point de ne pas avoir besoin de recourir à son collègue de mathématiques. Ceci se confirme au regard de la réponse à la question :

Est-ce que vous éprouvez des difficultés particulières lorsque vous enseignez les équations différentielles ?

> *« Je n'enseigne pas les équations différentielles ...Donc je suis tranquille !. De temps en temps on revient pour dire que vous voyez ça c'est une équation différentielle, mais pas de rappels mathématiques. S'il ne doit pas y avoir d'allégement de programme, je crois que je ferai encore comme ça cette année, c'est à dire j'irai au plus direct. Je ne souhaite pas perdre mes élèves dans des développements mathématiques. Parce que, quand les élèves rencontrent une difficulté, les élèves vont s'attacher à ça. Or dans le cours, ce n'est pas cette partie-là qui est primordiale. Ça ne fait pas partie des compétences exigibles, donc on va se limiter, c'est vrai que de temps en temps on va faire quelques démonstrations ».*

Pour conclure, Joël signale l'importance des équations différentielles pour l'enseignement de la physique en indiquant :

> *« Quelle physique on ferait sans les équations différentielles ? Elles sont incontournables. On y attachait une importante moindre auparavant dans les anciens programmes mais pourtant elles étaient là. »*

c) Synthèse

Représentations des élèves

Pour ce qui est des représentations que doivent avoir les élèves à propos des équations différentielles, les deux enseignants de la classe A reconnaissent que leurs élèves ont peur de cette notion : peur liée à la terminologie, due la complexité des situations de modélisations (Gilberte) et à la difficulté à établir le lien entre les équations différentielles étudiées en mathématiques et celles étudiées en physique dont la différence essentielle porte sur les notations.

Collaboration entre les deux professeurs

Sur ce point, on voit bien la position de ces deux professeurs.

Gilberte, qui affirme être favorable à la discussion avec son collègue de physique précise que dans la pratique, elle ne traite pas les situations de modélisation (sauf en activité si besoin est !) parce que cela l'éloigne des mathématiques et que c'est une perte de temps, pense-t-elle.

Joël quant à lui, évoque comme difficultés la "lourdeur" du programme (très dense) et les connaissances exigibles au baccalauréat. D'après lui, dans l'état actuel des choses, il est impossible de faire autrement que de donner une justification aux connaissances mathématiques utilisées dans le cours. Joël pense que c'est même mieux que ce soit lui qui fasse les rappels mathématiques plutôt que son collègue de mathématiques.

Les pratiques de ces deux professeurs indiquent que les programmes peuvent être appliqués au niveau de chaque discipline, mais sans travailler la continuité didactique.

La méthode d'Euler et l'introduction des outils informatisés

Gilberte utilise la calculatrice pour étudier la méthode d'Euler : c'est une aide. Elle trouve que c'est plus pratique d'utiliser une calculatrice qu'un ordinateur (cela fait gagner du temps et évite de déplacer les élèves dans la salle informatique) ; les élèves s'y appliquent.

En revanche, Joël pense que la difficulté est fonction du domaine dans lequel on applique la méthode d'Euler (qui nécessite un outil informatique). C'est plus facile pour les élèves dans le domaine de la mécanique et que dans les autres (radioactivité, électricité).

À travers les réponses des deux enseignants, l'introduction des outils informatisés n'apparaît pas comme un élément qui viendrait renforcer les liens entre les mathématiques et la physique dans cette classe.

III.2.2. Entretiens pour la classe B

a) Mathématiques

Olivier enseigne en terminale scientifique depuis 8 ans. Nous résumons dans ce qui suit ses réponses aux différentes questions.

Question 2. Dans le programme actuel de mathématiques, la notion d'équation différentielle est très liée à la notion de fonction exponentielle.

Comment introduisez-vous chacune de ces notions ?

Les explications fournies par Olivier sur la manière dont il introduit l'équation différentielle et la fonction exponentielle montrent que cet enseignant se conforme aux nouvelles orientations du programme sur le jeu entre l'équation $f' = f$ (avec $f(0) = 1$), la méthode d'Euler et la courbe approchée de la fonction exponentielle.

Question 3. Quelles sont les difficultés rencontrées par les élèves ?

Selon Olivier, l'une des difficultés vient de la compréhension du mot "équation différentielle".

> *« Je crois que la notion d'équation, ils pensent à des nombres ; différentielle, ils ont du mal à trouver, ... à voir ce que c'est que la solution. »*

Question 4. À l'issue des cours sur cette partie du programme, que doit représenter à votre avis pour l'élève l'expression "équation différentielle" ?

Pour Olivier, les élèves doivent être amenés à associer la notion d'équation différentielle à celle de la modélisation.

> *« L'équation différentielle, surtout en physique pour lui, ça devrait faire penser plus à modélisation, à un problème particulier de physique appliqué aux maths. On est là beaucoup plus à étudier les comportements des solutions »*

Par "étudier le comportement des solutions", Olivier fait allusion à l'étude des situations de modélisation conduisant à une équation différentielle et à un traitement mathématique (résolution de l'équation différentielle, étude et interprétation du comportement de la fonction solution).

Il semble que cet enseignant accorde une grande importante à la relation entre les mathématiques et les autres disciplines à travers l'étude des situations de modélisation. La question 7 de ce protocole devrait normalement nous donner des indications sur la place accordée aux situations de modélisation dans le cours d'Olivier.

Question 5. L'utilisation de l'approche numérique et des instruments informatisés (ordinateur ou calculette) vous paraît-elle une aide ?

Olivier utilise l'ordinateur avec ses élèves ; il affirme que l'approche numérique constitue une aide pour la construction d'une courbe approchée de la fonction exponentielle. Les difficultés qui apparaissent chez les élèves sont souvent liées aux questions techniques (liées au logiciel) et Olivier arrive à les leur faire surmonter. Par rapport à ces difficultés, il pense qu'il ne s'éloigne pas de son objectif, qui est celui d'étudier les mathématiques, lorsqu'il consacre un peu de temps à expliquer le fonctionnement d'un logiciel en vue de l'apprentissage d'une notion mathématique :

> *« Je pense que c'est toujours des maths ; on va utiliser un logiciel pour approcher une fonction, ça reste dans les mathématiques ».*

Il est important de souligner que cet enseignant remarque que les élèves qui arrivent en terminale n'ont pas de souvenirs de la méthode d'Euler. Il se trouve dans l'obligation de la réexpliquer.

> *« ...je réexplique ; c'est clair qu'il faut revenir à cette méthode-là en TS. C'est sûr, à mon avis, ils n'ont pas très bien compris l'intérêt profond ... sinon, ils ont compris quand même ; il faut leur rappeler comment ça fonctionne »*

Montrer l'intérêt profond de la méthode d'Euler consiste à faire saisir la dialectique « exact/approché » qui est loin des pratiques habituelles des élèves. C'est dans ce sens que nous interprétons ce passage d'Olivier :

> *« C'est vrai, là il peut y avoir une difficulté ; on approche la courbe avec des portions de droites, avec des segments, pour eux il y a une petite difficulté c'est vrai ; les réactions qu'ils ont eu au début ; d'habitude on leur fait tracer des courbes des fonctions exactes mais là on leur demande des courbes approchées. On doit leur dire que ce n'est pas la vraie courbe, ça donne une idée ».*

Question 6. Selon le programme, l'introduction et l'utilisation des équations différentielles doivent être faites conjointement en mathématiques et sciences physiques. Travaillez-vous conjointement ou en collaboration avec votre collègue de physique ?

La réponse d'Olivier est non, c'est-à-dire que les rapports entre lui est sa collègue de physique ne comportent pas un regard croisé sur ce que chacun fait (ou peut/doit faire) dans sa classe. D'ailleurs il ironise sur la demande de sa collègue :

> *« ... elle m'a dit de faire les exponentielles le plus rapidement possible* [rire]. *Elle a parlé des équations différentielles avant moi. Donc ils ont eu des équations différentielles d'après ce qu'elle m'a dit, pour pouvoir faire ... elle avait des choses à traiter. Quand je les* [élèves] *ai vus, ils en avaient déjà entendu parler et appliquer aussi ».*

Le rire semble marquer un étonnement de voir les équations différentielles être abordées en physique avant qu'elles ne le soient en mathématiques.

Question 7. Dans les manuels scolaires, on trouve des exercices qui font référence à une question de physique (exemple ci-joint) ; utilisez-vous / favorisez-vous ce type d'exercices ?

Olivier favorise en effet ces types d'exercices qui pour lui, permettent de montrer l'importance de ce l'on fait (en mathématiques) pour les autres sciences :

> *« L'intérêt c'est qu'ils les voient aussi en physique. C'est pour leur montrer qu'il n'y a pas que les maths ou pour rendre plus attrayant. C'est aussi plus attrayant d'utiliser (...). Là ils voient à quoi ça sert. De toute façon c'est ce qui est conseillé dans les programmes ... »*

Olivier ajoute que, pour ce type de problème, il arrive qu'il soit amené à expliquer le sens physique (de la situation) avant son traitement mathématique :

> *« Pour moi, il n'y a pas de problème pour ça ; étant scientifique, ma formation scientifique me permet de comprendre ».*

Selon lui, le caractère « habillage » de ces exercices est discutable ; il rappelle que ce sont des sujets "à la mode", comme on peut le voir sur les sujets des deux dernières sessions du baccalauréat.

Ces exercices mettent en relation plusieurs disciplines. Cependant Olivier semble ne pas comprendre que ses collègues des autres disciplines abordent les équations différentielles sans qu'il ne les ait traitées avant (cas de son collègue de physique) ou bien ne les abordent pas (cas de son collègue de biologie)

> *« ...j'ai demandé au prof de bio s'ils ont déjà fait ça, il m'a dit « non, non » ...* [rire] *...on peut le faire, mais ils ne le font pas ».*

Il souligne là un manque de coordination entre les enseignants sur un thème mathématique qui intervient à la fois dans les trois disciplines.

Par contre, pour lui, le fait de voir apparaître dans le programme de physique certains types d'équations différentielles alors qu'elles ne sont pas au programme en mathématiques ne le gêne pas.

> *« ... moi je ne m'en plains pas parce que je n'ai pas à les utiliser. C'est plutôt ma collègue de physique qui doit se plaindre. ...En tout cas, sur ce qui se fait en physique, je m'y intéresse de loin. On n'a pas trop de contacts mais on s'entend très bien ».*

On peut comprendre (en se référant aussi à la réponse à la question 4) que cet enseignant aime traiter les exercices de modélisation portant sur les équations différentielles dans sa classe (sans doute pour montrer l'importance, voire la puissance, des mathématiques dans le développement des sciences) mais il ne s'intéresse pas à ce que fait sa collègue de physique dans ce domaine. Non seulement il n'a pas de temps pour le faire mais aussi, déclare-t-il, parce que sa formation scientifique lui permet d'aborder seul dans sa classe des situations qui sont en lien avec la physique.

Pour finir, Olivier pense qu'il n'est pas souhaitable, ni même pensable, de supprimer les équations différentielles des programmes de mathématiques.

b) Physique

Florence enseigne la physique dans la même classe qu'Olivier. C'est depuis 28 ans qu'elle enseigne cette discipline en terminale scientifique.

Sur la question 2, « **À propos de quelle étude êtes-vous amenée à introduire les équations différentielles ? »**, Florence nous rappelle la problématique de l'enseignement et de l'apprentissage des équations différentielles en terminale S, telle que l'envisage le programme actuel de physique.

> « *...Ce qui est prévu normalement c'est d'introduire l'équation différentielle une première fois en radioactivité. L'ordre normal du programme c'est ça. En principe le professeur de mathématiques doit donner les outils de probabilité, ...* »

Cependant Florence choisit une autre progression que celle proposée par le programme, et affirme qu'il s'agit d'un choix personnel.

> « *Moi je n'ai pas fais ce choix, justement, avec mon collègue de mathématiques. J'étais trop en avance sur lui, et c'est ce qui nous arrive à tous malheureusement depuis 2 ou 3 ans. On n'arrive pas du tout à se connecter. Ce que j'ai fait comme choix c'est de lui laisser introduire les équations différentielles en mathématiques et puis j'ai attendu un petit peu et puis entretemps je me suis dit ça sera en mécanique cette année* ».

Il faut préciser que Florence parle d'une avance (à propos l'introduction des équations différentielles) qu'elle constatait souvent sur ses anciens collègues de mathématiques. Cette année, elle laisse introduire les équations différentielles d'abord en mathématiques. Pourtant, son nouveau collègue Olivier, qui reconnait avoir reçu une demande de Florence pour que soient introduites très tôt la fonction exponentielle et les équations différentielles en mathématiques, semble de son côté être surpris de constater que ses élèves ont déjà abordé cette notion en physique.

Cette contradiction qui apparait ici entre les déclarations des professeurs, peut s'expliquer par un manque de vigilance de Florence après avoir émis le souhait à son collègue de mathématiques ; il est possible qu'elle n'ait pas vérifié si réellement les équations différentielles avaient bien été introduites en mathématiques. Nous rappelons aussi que Florence n'a pas chiffré le temps qu'elle accordait à son collègue (... semaines ? ... mois ?).

Question 3. À cette époque de l'année, les élèves ont vu les équations différentielles en mathématiques ; est-ce qu'une équation du type $RC\frac{dUc}{dt}+Uc=E$ est facilement "reconnue" comme une "équation différentielle de mathématicien" ?

Sur cette question, Florence signale une difficulté ressentie par ses élèves relativement à la reconnaissance de certains types d'équations différentielles.

> *« Je dirais qu'elle est reconnue comme étant un groupe de signes, auquel l'élève va réagir en disant que "ça, ce qu'il faut que j'écrive pour ça, je connais le raisonnement que je vais suivre" mais je ne suis pas du tout certaine qu'il l'apparente à une équation différentielle. »*

Question 4. Quelles sont les difficultés rencontrées généralement par les élèves dans cette articulation maths-physique ?

La réponse de Florence à cette question rejoint celle qu'elle a donnée précédemment (question 3). Elle parle ici d'un cloisonnement des disciplines. Les élèves ont du mal à faire une association entre ce qui est fait en mathématiques et ce qui est fait en physique ; les élèves ont toujours des difficultés, même quand Florence essaie d'harmoniser les notations (en tenant compte de celles employées en mathématiques) :

> *« Ils ont une difficulté de rapidité de calcul ; ils ont peu de capacité à anticiper donc ils se perdent souvent ... lorsqu'ils font des mathématiques ce sont des mathématiques, ce n'est pas le même état d'esprit lorsqu'on fait de la physique où les mathématiques interviennent. Ils ont déjà de grandes difficultés à faire le lien. Pourtant, on essaie de s'en tenir aux notations du professeur de mathématiques ... mais finalement on ressent les mêmes difficultés »*

Florence pointe une autre difficulté, due à un manque de cohérence entre les programmes scolaires des mathématiques et de physique. Les équations différentielles du second ordre sont au programme en physique alors qu'elles ne le sont plus en mathématiques :

> *« Et puis l'autre difficulté c'est le fait que nous devront introduire nous des outils qui n'ont pas été introduits en mathématiques, je parlais des équations différentielles du second ordre et là on fait ce qu'on peut, quoi ! Et sans doute ce qui est vrai il y a une double difficulté qui est très mal vécue par les élèves. Pour eux c'est une recette, c'est un raisonnement qui s'apprend du début à la fin. Je crois que très peu d'entre eux ont conscience de ce qu'ils sont en train de faire ».*

Elle affiche tout de même son optimisme de réussir à montrer à ces élèves toute l'importance des mathématiques :

> *« Mais moi, j'aimerais que les mathématiques ne soient pas vécues pour eux comme un simple outil. J'aimerai arriver à leur faire comprendre : c'est ce qui structure la physique, ça fait partie de la physique ... (rire) ; c'est vraiment une ambition beaucoup trop grande ».*

Pour Florence, le programme actuel se prête assez bien pour montrer l'articulation entre les deux disciplines, mais le chemin est encore long pour arriver à faire toucher aux élèves cette réalité des sciences « imbriquées ».

> *« j'aurai peut être, sur trois générations, 10 élèves qui auraient un peu senti ça. Et encore, je suis optimiste ... (rire) »*

Question 5. En fin d'année scolaire, que doit représenter à votre avis pour l'élève l'expression "équation différentielle" du point de vue du "physicien" ?

Pour Florence, la plupart de ses élèves peuvent arriver à décrire une équation différentielle comme étant une relation qui fait intervenir une fonction avec ses dérivées première ou seconde, et un certain nombre de constantes. Certains d'entre eux, ajoute-t-elle, sont capables de réaliser que les constantes en question font partie du système physique défini et que ces constantes vont peut-être dépendre des conditions initiales. Mais ce qui reste à faire, c'est le réinvestissement dans l'autre discipline :

> *« Il me semble qu'ils font une différence essentielle entre les mathématiques et la physique ; donc en physique, ils ne reconnaissent pas l'équation différentielle, ils reconnaissent une relation un groupe de signes sur lequel ils déclenchent un raisonnement qui, finalement est toujours le même. J'ai bien peur que ça ne soit que ça !*
>
> *...Si j'avais la possibilité de vérifier ça plus précisément, j'essayerai par exemple de leur faire établir une équation différentielle dans un domaine où, justement la structure de l'équation différentielle n'est pas celle qu'ils ont l'habitude de voir, et puis de leur demander quel nom générique on pourrait donner à ce type de relation. Je suis certaine qu'aucun ne répond ».*

Sur les difficultés de conceptualisation des équations différentielles en classe de terminale S, Florence pense que c'est trop tôt de demander aux élèves d'avoir du recul à ce niveau d'étude pour pouvoir raisonner d'une discipline à une autre :

> *« c'est peut être pas de leur faute ni de la nôtre, c'est simplement que ce n'est pas suffisant peut-être comme enseignement en terminale pour prendre ce recul, voyez. C'est peut être encore un peu trop tôt quoi ! Et puis, même s'ils pouvaient prendre ce recul, en quoi ça les rendrait plus performants ... je ne sais pas ».*

Question 6. L'utilisation de l'approche numérique (méthode d'Euler) et des instruments informatisés (ordinateur ou calculette) vous paraît-elle une aide ? Ou bien est-ce l'introduction d'un nouveau "point de vue" ("informaticien") qui vient se surajouter ?

Florence déclare être convaincue par le "réalisme" que permet la méthode d'Euler pour étudier la complexité de certains phénomènes physiques. Selon elle, cette méthode n'est pas si difficile à faire comprendre et si coûteuse en temps. Cependant, elle déplore le fait qu'elle ne soit pas très bien exploitée dans l'étude des chutes avec frottement :

> *« c'est même un petit peu dommage dans le fond que l'on propose comme ça un modèle en kv, un modèle en kv^2, c'est un petit peu artificiel ; parce que j'ai quand même vu, malgré la faiblesse des classes que j'ai eues auparavant, des élèves vouloir continuer, c'est-à-dire qui se disaient pourquoi on s'arrête à 2. C'est vrai que je me suis dit, dans le fond, on pourra peut-être mettre n et puis après voir quel est ce nombre n plutôt que de manière plutôt artificielle dire que c'est kv, c'est vrai que kv c'est bien, ça donne une équation qu'on sait résoudre, c'est peut-être ça le point de départ, mais peut-être après kv on pourrait peut-être dire que c'était pas une puissance égale à 1, peut-être qu'il faut chercher quelle est la puissance la plus cohérente ».*

Pour elle, conduire les élèves à choisir eux-mêmes la valeur de n qui convient dans le modèle des forces de frottement en kv^n rendrait plus pertinente l'approche de la notion de "modèle".

Question 7. L'introduction et l'utilisation des équations différentielles doivent être faites conjointement en mathématiques et sciences physiques. Proposez-vous des sujets d'exercices de physique à votre collègue de mathématiques ?

La réponse de Florence à cette question est "non !" en ajoutant qu'elle ne l'a jamais fait, d'autant plus que ses collègues de mathématiques changent souvent (chaque année !)

> *« Cette année, je sens que ça pourra se faire par rapport aux collègues avec lesquels j'ai travaillé auparavant. Ce n'est pas impossible qu'on y arrive. »*

Elle précise tout de même qu'elle regarde les sujets qui sont proposés en mathématiques au baccalauréat pour relever la part d'"application" qui s'y trouve, mais ne va pas loin dans l'investigation.

Question 8. Les équations différentielles du second ordre ne sont plus au programme de mathématiques, mais sont utilisées en physique : cela ne constitue-t-il pas une incohérence dans l'articulation maths-physique?

Florence a déjà répondu en partie à cette question quand elle a évoqué les difficultés ressenties par ses élèves (question 4). Elle ajoute :

> *« C'est un gros problème effectivement ; on pourrait qualifier cela d'incohérence parce que là les élèves sont sur un terrain totalement inconnu, ils n'ont que notre seul discours pour leur faire approprier les connaissances. En plus ce sont des connaissances difficiles car ils n'ont plus de connaissances sur les fonctions trigonométriques en général, beaucoup moins qu'avant. Donc là on touche à une partie de la physique qui est un apprentissage des formules. On n'est pas très convaincant »*

Elle revient implicitement sur le souhait de voir ce type d'équations différentielles abordé d'abord dans le cours de mathématiques ou bien de supprimer des programmes certaines parties qui traitent de ces équations différentielles.

« Je pense qu'il ne faudrait pas étudier les mouvements sinusoïdaux par exemple ! »

Question 9. Pour vous, l'utilisation des équations différentielles reste-t-elle difficile pour les élèves actuels de Terminale S ? Serait-il envisageable de supprimer cet aspect très mathématique des programmes de physique de lycées ? (Et de privilégier une approche plus phénoménologique)

Florence trouve bien le programme actuel mais dénonce son côté "encyclopédique". Elle pense qu'il aborde trop de notions ; elle plaide donc pour un enseignement plus "modeste" qui ne se propose pas de chercher à couvrir toute la physique, ce qui conduira à étudier moins d'équations différentielles comme c'est le cas dans le programme actuel. Certaines parties devraient alors être supprimées du programme :

> *« Je pense qu'il faut supprimer des parties de programme qui font apparaître d'autres équations différentielles ... on pourrait aller étudier un petit peu d'autres types d'équations dans d'autres domaines de la physique que la mécanique mais pas du second ordre. Il faudrait à ce moment-là se cantonner à un type d'équations »*

c) Synthèse

Représentations des élèves

Pour Olivier, les élèves ont du mal à conceptualiser la notion d'équation différentielle, surtout ceux qui cherchent à comprendre la signification (voire l'étymologie) de « équation » et de « différentielle » par rapport à ce qu'ils savent déjà. D'où l'intérêt de mettre en avant les situations de modélisations conduisant à une équation différentielle.

En revanche, pour Florence, les élèves ont du mal à faire le lien entre ce qui se fait en mathématiques et ce qui se fait en physique à propos des équations différentielles. D'où le souhait de voir introduire les équations différentielles d'abord en mathématiques avant qu'elles soient abordées en physique. Ceci aiderait les élèves à comprendre ce qu'ils font dans les deux disciplines.

Collaboration entre les deux collègues

Les deux enseignants de la classe B ont des contacts. Mais ils ont des points de vue différents sur le rôle de chaque enseignant pour développer un travail conjoint. En effet, Olivier choisit de montrer l'importance des mathématiques en utilisant en applications des situations de modélisation. Il pense avoir les connaissances nécessaires (du fait de sa formation scientifique) pour travailler ces situations issues de la physique, sans nécessairement avoir besoin de sa collègue de physique Florence.

Cependant Florence manifeste le désir de s'entretenir avec son collègue Olivier pour discuter de la progression mais aussi des notations (surtout au début de l'année). Son souhait serait que son collègue commence à traiter les équations différentielles avant elle. Elle ne voit pas la nécessité de regarder ce que fait son collègue en mathématiques, parce qu'elle n'a pas beaucoup de temps pour traiter le programme.

La méthode d'Euler et l'introduction des outils informatiques

Olivier précise que ses élèves arrivent en terminale sans souvenirs de ce qu'ils ont fait en première S sur la méthode d'Euler. Mais une fois le rappel fait, les élèves s'y intéressent beaucoup sans trop de difficultés particulières, si ce n'est celles liées à l'utilisation du logiciel. Olivier approuve l'idée d'introduire la méthode d'Euler dans le programme actuel et les outils (informatiques) destinés au traitement de cette méthode.

Quant à Florence, elle pense que c'est un point positif d'avoir introduit la méthode d'Euler dans l'enseignement de la physique. Elle pense aussi, les outils informatiques aidant, qu'il y a besoin d'améliorer les activités prévues pour cette méthode, notamment sur la possibilité de faire varier l'entier n dans le modèle kv^n.

La méthode d'Euler est donc utilisée par les deux enseignants sans qu'elle ne fasse l'objet d'une concertation. Olivier traite la méthode d'Euler dans un cas intra-mathématique (construction de la courbe approchée de la fonction exponentielle) et Florence de son côté utilise cette méthode sans vraiment s'appuyer sur ce que fait son collègue en mathématique. Les disciplines semblent donc être considérées comme "autosuffisantes" pour les deux enseignants.

III.3. Conclusion

Les entretiens réalisés au près de 4 quatre enseignants (2 en mathématiques et 2 en physique) intervenant dans deux classes de terminale S ont permis de cerner :

- la manière dont chacun des enseignants introduit les équations différentielles,
- les types de difficultés que les élèves rencontrent sur l'apprentissage et/ou l'utilisation de cette notion,

la nature des relations entre les professeurs intervenant dans la même classe et leur point de vue sur les intentions didactiques des programmes à propos des équations différentielles

l'importance des équations différentielles dans l'enseignement secondaire.

Conformité au programme

Pour ce qui concerne l'introduction des équations différentielles, les commentaires des professeurs montrent une certaine conformité aux programmes dans les deux disciplines, sauf pour un enseignant.

Il s'agit de l'enseignant de physique de la classe B (Florence), qui a choisi une organisation personnelle. Pour cet enseignant il n'est pas concevable que ses élèves abordent les équations différentielles dans sa classe sans les avoir étudiées en mathématiques. Florence ne pense pas être en rupture avec le programme sur son intention d'inciter les enseignants des deux disciplines à un travail conjoint. Mais pour elle, l'organisation (et même la progression) qui est prévue dans le programme de physique ne permet pas de réaliser une telle intention.

Difficultés des élèves

Les deux enseignants de la classe A parlent d'une difficulté "psychologique". Ils pensent que leurs élèves ont peur dès qu'ils entendent parler des équations différentielles. Cette peur est renforcée par le cloisonnement des disciplines. Les enseignants de la classe B abondent dans le même sens en précisant que les élèves ont du mal à établir le lien entre ce qu'ils font dans les deux disciplines. Nous interprétons ce constat en termes de cadres de rationalité, par l'absence d'un cadre commun de rationalité personnel chez l'élève. On peut alors penser qu'il existe plutôt deux cadres personnels qui fonctionnent alternativement chez l'élève : le cadre personnel des mathématiques, d'une part, et le cadre personnel de la physique, de l'autre.

Relations ambiguës

L'incitation à un travail conjoint est interprétée de différentes manières par les enseignants. Pour la classe B par exemple, l'enseignant de physique affirme qu'il y a un dialogue avec son collègue de mathématiques. Ce dernier nous a fait savoir (avec beaucoup d'ironie) qu'il a reçu de sa collègue la demande de commencer les équations différentielles plus tôt ; mais ce qui l'a beaucoup gêné c'est de constater que ses élèves avaient déjà abordé les équations différentielles en physique au moment il voulait les introduire. On voit bien que les relations entre les enseignants ne sont pas faciles.

Quant aux professeurs de la classe A, chacun de son côté pense que le dialogue n'est pas possible ; le manque de temps est la principale raison évoquée.

Finalement, la méthode d'Euler introduite dans les programmes des deux disciplines ne semble pas être un élément moteur pour déclencher un vrai dialogue entre les deux enseignants.

IV. Les observations de classes

Après une étude des manuels pour caractériser la manière dont la continuité didactique se concrétise dans les faits, et après avoir analysé le questionnaire (complété par des entretiens) destiné aux enseignants des mathématiques et de physique, il nous a paru nécessaire de nous intéresser à la manière dont cette continuité didactique, dans le cas précis des équations différentielles, apparaît dans la pratique des classes. Là encore, compte tenu des contraintes matérielles très fortes, nous n'avons envisagé dans un premier temps que quelques observations nous permettant d'avoir une première idée sur la façon dont, concrètement, les activités sur les équations différentielles et notamment la méthode d'Euler peuvent être mises en œuvre.

IV.1. Les hypothèses et l'articulation des différents "points de vue"[76]

L'analyse des manuels et celle de la place de la méthode d'Euler en terminale S que nous avons menées nous a conduit à formuler une hypothèse sur le "point de vue" des enseignants sur la méthode d'Euler. Nous considérons que, penser un traitement des équations différentielles à partir de la méthode d'Euler et, ce, dans une perspective de vision croisée, revient à considérer de façon complémentaire trois points de vue : mathématiques, physique et informatique.

IV.1.1. Le point de vue "mathématique"

Le point de vue "mathématique" consiste à considérer la méthode d'Euler comme étant une méthode mathématique dont la mise en œuvre fait appel à des éléments de rationalité mathématique. C'est le cas, par exemple, en classe de mathématiques, de sa mise en œuvre lors de l'introduction de la fonction exponentielle dans un contexte intra-mathématique.

[76] La notion de point de vue est à prendre au sens de Rogalski (1998)

L'intérêt de la méthode d'Euler se trouve alors dans sa mise en application dans le domaine de l'Analyse avec des notions de l'Analyse : approximation affine, suite numérique, fonction exponentielle, convergence (limite), etc. C'est donc une vision strictement intra-mathématique.

IV.1.2. Le point de vue "physique"

Le point de vue "physique" consiste à considérer que la méthode d'Euler a été introduite dans l'enseignement secondaire comme réponse à des questions qui se posent dans l'enseignement de la physique. Son utilisation en physique ne soulève pas nécessairement des questions essentielles de l'Analyse. En effet, l'existence de la fonction dont on veut construire la courbe approchée est acquise (admise). Cette fonction (appellation mathématique) - mais grandeur en physique - est le fait d'un phénomène concret. Par exemple en mécanique, en parlant du mouvement, cela suppose l'existence d'une vitesse (fonction ou grandeur) ; ou encore en électricité, fermer un circuit conduit à considérer l'existence d'un courant électrique.

Le traitement de ces fonctions (grandeurs), pour la plupart solutions d'équations différentielles, évacue un aspect important de l'Analyse qui est la notion de continuité. La méthode d'Euler, bien qu'issue des mathématiques, est considérée comme un outil dont les éléments de rationalité sont à la fois mathématiques et physique.

IV.1.3. Le point de vue "informatique"

Le point de vue « informatique » consiste à considérer la méthode d'Euler comme un élément de la concrétisation de l'intégration des Techniques de l'Information et de la Communication dans l'Enseignement (TICE). C'est avant tout l'entrée technologique qui est mise en avant, c'est à dire, montrer la puissance technologique de l'informatique au service des sciences. À partir d'une équation différentielle et d'une valeur de la fonction solution inconnue, des logiciels tableurs/grapheurs permettent de construire des tableaux de valeurs numériques (qui sont des valeurs approchées de vraies valeurs de la fonction solution) et de les représenter graphiquement. Ces logiciels proposent plusieurs styles des courbes de représentation : courbe point par point, courbe polygonale, courbe lisse (nuage de points avec lissage), etc.

Nous avons supposé qu'en fonction des objectifs assignés aux TP, un enseignant peut adopter un point de vue plutôt qu'un autre, ou considérer à la fois deux ou trois de ces points de vue.

IV.2. Sur quoi portent les observations ?

Choix de séquences

Le traitement numérique des équations différentielles par la méthode d'Euler est l'une des entrées choisies par le GEPS pour la mise en œuvre de la synergie entre les deux disciplines. De plus, des travaux pratiques (TP) sur cette méthode sont prévus dans les deux disciplines. Il nous a donc paru important d'examiner des séquences de travaux pratiques (TP) réalisées dans les deux disciplines sur cette méthode.

Nous avons suivi deux enseignants intervenant dans une même classe d'un lycée de la région parisienne. Il s'agit de :

Marcel qui enseigne les mathématiques en terminales scientifiques depuis 8 ans

Antoinette qui enseigne la physique en terminale scientifique depuis 20 ans.

Ces séances se passent en novembre 2006 pour Marcel et en mars 2007 pour Antoinette.

Organisation

Notre but est de tenter de cerner la place accordée par l'enseignant à l'articulation des deux disciplines, c'est-à-dire à l'évocation de l'autre discipline du point de vue :

de la praxéologie : analyser les principaux types de tâches apparaissent, avec quel(s) bloc(s) technologico-théorique(s).

des registres de représentation utilisés

des notations

Pour chacun des deux professeurs, nous présentons d'abord les différentes parties du protocole (c'est-à-dire le document rédigé par l'enseignant et proposé ensuite à ses élèves, qui précise les grandes étapes des tâches que doit réaliser l'élève) puis nous commentons le discours de l'enseignant sur les consignes et les tâches que doivent réaliser ses élèves.

IV.3. Analyse des séances de travaux pratiques

IV.3.1. Analyse des protocoles

a) Séance des travaux dirigés en mathématiques

Cette séance de TP s'est déroulée en novembre 2005 ; elle a duré 45 minutes. Ce TP s'est fait tôt dans l'année pour des raisons institutionnelles (conformément à la progression suggérée par le programme scolaire) mais aussi, pour répondre à une demande du professeur de physique. En effet Marcel (l'enseignant de mathématiques de cette classe) nous a affirmé avoir rencontré son collègue de physique en début de l'année, qui lui a fait part de son besoin de parler à ses élèves de la fonction exponentielle et de la méthode d'Euler pour la résolution numérique des équations différentielles. Le souhait de son collègue était que ces notions soient introduites dans le cours de mathématiques avant qu'elles ne soient abordées en physique.

Cette séance peut être décomposée en trois parties :

une première partie sur les rappels

une deuxième sur la mise en œuvre de la méthode d'Euler

une dernière qui est l'institutionnalisation

Partie 1 :

Marcel précise avant tout le but de la séance :

« L'objectif est de construire point par point une fonction f dérivable sur R telle que f'(x) = f(x) et f(0) = 1 »

Pour se faire, un rappel d'une notion mathématique servant de pré-requis est fait ; il s'agit de la notion d'approximation affine, déjà vue par les élèves normalement en classe de première :

Rappel : $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x0) + h\,\varepsilon(h)$ *avec* $\varepsilon(h) \to 0$ *quand* $h \to 0$.

L'expression $f(x_0) + hf'(x_0)$ *représente l'approximation affine de f. d'où :*

$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$

$f(x_0 - h) \approx f(x_0) - hf'(x_0)$ *pour h proche de 0*

C'est pour gagner du temps que ce rappel est fait par lui-même, nous a-t-il déclaré. Aucune question n'a été posée aux élèves.

Partie 2 : Introduction et mise en œuvre de la méthode d'Euler.

Phase 1 : Après avoir précisé que *h* sera appelé pas de calcul, Marcel fixe une valeur de *h* et demande aux élèves de compléter des calculs ci-dessous (d'abord dans l'environnement papier/crayon ensuite sur un tableur).

Mise en œuvre : $h = 0,5$

Complète par le calcul

$f(0) = 1$

$f(0+0,5) = f(0) + 0,5f'(0) =$

$f(0,5 + 0,5) =$

f(0 – 0,5) =

f(- 0,5 + 0,5) =

Après ces calculs, l'enseignant rappelle que la seule valeur exacte de f est celle prise en 0 c'est-à-dire 1 ($f(0) = 1$).

Ensuite l'enseignement demande aux élèves d'ouvrir une page Excel en précisant que le travail à faire est le même que celui qui vient d'être fait sur papier/crayon. Il y a juste à indiquer quelques particularités liées à l'utilisation des formule sous Excel notamment la référence absolue : $A$5.

L'intervalle d'étude étant [-2 ; 2], les formules donnant $f(x_0 + h)$ et $f(x_0 - h)$ sont traduites en langage du tableur.

L'enseignant reproduit au tableau une partie de la feuille Excel en indiquant les formules à utiliser :

h est dans la cellule A5, $x_0 = 0$ dans la cellule B5 et $f(0)$ dans la cellule C5. Pour obtenir les valeurs successives des xi on utilise la formule B5 - $A$5 et B5 + $A$5 et pour les valeurs approchées $f(x_i)$, on utilise les formule C5 - $A$5*C5 et C5 + $A$5*C5.

Marcel explique le lien entre ces deux dernières formules et la formule de l'approximation affine. Ensuite, pour obtenir toutes les valeurs (souhaitées), il suffit alors de "tirer" avec la souris. Les valeurs obtenues sont représentées dans un graphique.

Phase 2 : L'enseignant demande de recommencer cette fois avec un nouveau pas $h = 0,1$ mais en gardant l'intervalle d'étude [-2 ; 2]. Il fait construire sur la même feuille Excel la table des valeurs et la courbe de la fonction "EXP" intégré dans le logiciel.

Partie 3 : institutionnalisation

Marcel fait remarquer que les deux courbes obtenues (courbe exponentielle et courbe approchée) sont très "proches" (voisines). Dans les commentaires, l'enseignant explique que la fonction dont on vient d'obtenir des valeurs numériques et des courbes approchées est la fonction exponentielle.

« La fonction obtenue est appelée fonction exponentielle de base e, notée exp »

L'unicité de cette fonction sera démontrée ultérieurement.

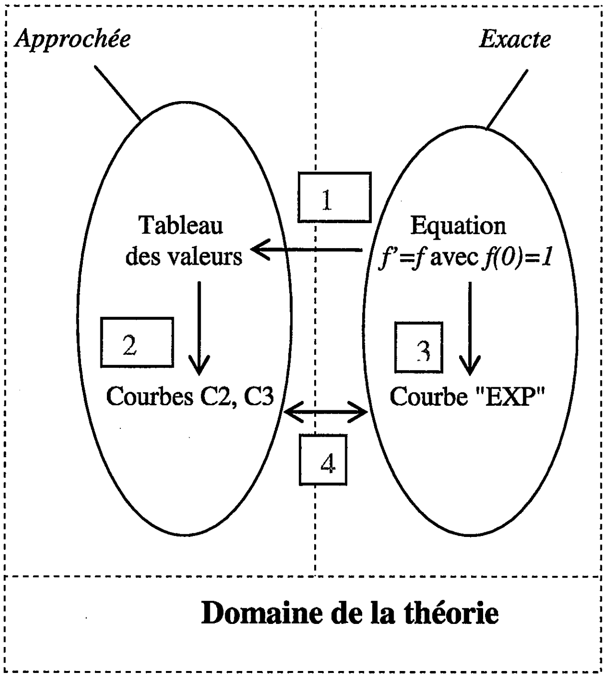


Tableau 37 : Processus (simplifiée) de construction de la courbe approchée de la fonction exponentielle

Quatre grandes étapes apparaissent :

1 : c'est l'étape conduisant à construction de la table des valeurs numériques, d'abord sur papier/crayon puis sur un tableur.

2 et 3 : étapes conduisant à la construction des courbes approchées en faisant varier le pas de calcul. La courbe "EXP" est celle de la fonction exponentielle intégrée dans le logiciel.

4 : cette quatrième étape consiste à montrer que toutes les courbes construites sont voisines (très proches) et renvoient à une même fonction qui est la fonction « exponentielle ».

Mais on peut toujours se demander en quoi ce travail prépare à une utilisation de la méthode d'Euler en physique.

- Le choix des pas est à la charge de l'enseignant. La deuxième valeur, $h = 0{,}1$, est un affinement du pas ; le principe sous-jacent est que « plus le pas est petit, meilleure est la précision ». mais on ne dit pas jusqu'où on peut aller dans le raffinement.
- Pas de travail sur l'erreur commise en approximant la fonction exponentielle par une suite de valeurs numériques.

- L'utilisation de la méthode d'Euler n'est pas explicitement liée à la résolution numérique d'une équation différentielle (ce qui sera le cas en physique).
- Aucune référence à la physique n'a été faite. Tout le travail se situe dans un contexte intra-mathématique.

b) Séances des travaux pratiques de physique

Cette séance a eu lieu en mars 2006 et a duré une heure. Le thème est : « Étude d'une chute verticale avec frottements ».

Les objectifs assignés à ce TP par l'enseignant sont :

- Déterminer les paramètres qui influent sur la chute d'un objet dans un fluide.
- Modéliser une force de frottements
- Résoudre une équation différentielle par la méthode d'Euler et utiliser un tableur ».

Le protocole est constitué de trois grandes parties

Partie 1 : analyse qualitative du mouvement vertical de translation d'un solide en chute dans l'air.

Parie 2 : analyse informatique d'un mouvement de chute.

Partie 3 : modélisation de la force de frottement.

Partie 1 : analyse qualitative du mouvement vertical de translation d'un solide en chute dans l'air.

On étudie la chute verticale d'un ensemble de quatre ballons lestés dans le référentiel terrestre « la salle » considéré comme Galiléen

<u>Bilan des forces</u> : (…)

<u>Vitesse :</u>

v est la vitesse d'un point de l'objet à l'instant t, quelle sera l'allure de la courbe représentative de la fonction $\mathbf{v = f(t)}$? (Donnez-en un tracé vraisemblable).

À votre avis, comment peut-on caractériser sur cette courbe l'évolution de la vitesse de chute ?

De quels paramètres dépend cette évolution ?

Quelle information est fournie sur l'une des forces extérieures appliquées au système ?

Encadré 3 : première partie du protocole.

Cette partie correspondant à une étude qualitative. Elle est traitée en 10 minutes.

<u>Tâche de l'enseignant :</u>

Après avoir fait rappeler les forces s'exerçant sur le système, l'enseignant trace rapidement l'allure de la courbe de la vitesse en fonction du temps ; il trace ensuite une droite parallèle à l'axe des abscisses (asymptote) et montre que la vitesse limite est l'ordonnée du point d'intersection de cette droite avec l'axe des vitesses (ordonnées). Il précise que :

> « ... *cette courbe correspond à ce que vous avez vu en électricité*[77] »

en ajoutant :

> *« on voit bien que la vitesse évolue avec le temps ; mais aussi, plus la vitesse croît plus l'accélération diminue ».*

La courbe de la vitesse tracée sert d'appui pour évoquer la relation entre la vitesse et l'accélération. L'enseignant montre que cette courbe tend vers une limite et par là, fait très vite le lien avec la notion d'accélération comme étant « la dérivée de la vitesse ».

Notions mathématiques évoquées :

La dérivée de la vitesse (pour exprimer l'accélération a) avec la notation différentielle, c'est-à-dire $a = \frac{dv}{dt}$

Cependant aucun lien n'est fait avec le cours de mathématiques. Aucune question n'a été posée par les élèves sur cette partie.

Parie 2 : Analyse informatique d'un mouvement de chute

[77] A ce moment, les élèves ont déjà abordé en électricité les équations différentielles du premier ordre.

Visualisation de la vidéo

Lancer le logiciel *Aviméca, d*ans le menu *Fichie*r, cliquer sur *Ouvrir un clip vidéo*

Sélectionner le fichier « chutair 22g »

Placer l'origine du repère : (...)

Pointer *échelle verticale* puis *premier point* (...)

Cliquer sur l'onglet *mesure* pointer sur chaque image (...)

Lorsque vos mesures sont terminées, cliquez sur *fichier / mesures / entrer dans le presse-papier / le tableau*

Etude du mouvement grâce au logiciel Excel :

Réduire le logiciel Aviméca et ouvrir Excel, cliquer Edition / Coller.

Insérer deux lignes (lignes 1 et 2) puis une nouvelle ligne (ligne n°4).

Dans *format / colonne / masquer* la colonne B.

Rentrez dans la case D7 la valeur initiale de la vitesse

	A	C	D	E	F
1		B =		A =	
2					
3	Pointages AviMéca				
4					
5	t	y	v	a	v calc
6	s	m	m/s	m/s²	m/s
7	0	0,00E+00			

Encadré 4 : deuxième partie du protocole.

Cette partie dure environ 30 minutes. Elle correspond à un recueil des données expérimentales en utilisant un enregistrement vidéo. Cette étape conduit à la détermination des positions successives prises par l'objet en mouvement à partir du traitement informatique. Deux logiciels sont utilisés : Aviméca et Excel.

Tâche de l'enseignant :

L'enseignant explique comment utiliser les logiciels : Aviméca dans un premier temps puis Excel.

Le logiciel Aviméca permet d'enregistrer, image après image, les coordonnées cartésiennes planes de points d'un objet en mouvement. Pour leur traitement, une exportation de ces données (positions de l'objet en mouvement) se fait vers un tableur-grapheur (Excel, Regressi, ...). Le logiciel Excel (choisi ici) permet d'obtenir une valeur de la vitesse v_i correspondant à la position y_i à l'instant t_i en utilisant la formule :

$$V_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t} \qquad \text{avec } \Delta t = t_{i+1} - t_{i-1}$$

L'enseignant demande à ses élèves d'exécuter les consignes du protocole.

Ainsi, à partir de l'ensemble des données $(t_i ; v_i)$ obtenues, une valeur de la vitesse limite est estimée.

Tâche des élèves

Les élèves suivent les consignes données par l'enseignant arrivent à la construction d'une courbe expérimentale de la vitesse.

Remarque : quelques difficultés sont apparues chez certains élèves au début de cette deuxième partie, notamment sur le choix du repère et sur le pointage.

Les éléments caractéristiques du mouvement (graphique, vitesse limite ...) obtenus dans cette deuxième partie – expérimentale – doivent être confrontés aux résultats théoriques obtenus dans la troisième partie sur la modélisation de la force de frottement.

Partie 3 : Modélisation de la force de frottement :

<u>1) Étude dynamique</u> : premier essai de modélisation : avec l'hypothèse **$f = k.v$**

Le volume des ballons est V = 5,4 L et la masse en chute est m = 22 g, masse volumique de l'air $\rho_{air} = 2g.L^{-1}$.

Appliquez au solide en chute la deuxième loi de Newton.

Montrez alors qu'avec l'hypothèse faite concernant les frottements, la vitesse v satisfait à une équation différentielle de la forme : $\frac{dv}{dt} + A.v = B$.

Identifier A et montrer que l'estimation de la vitesse limite permet de calculer la valeur de B.

Effectuez alors les calculs de A et de B pour la chute dont vous avez l'enregistrement. Préciser les unités !

<u>2) Résolution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler</u>

* Premiers termes :_ La méthode d'Euler s'appuie sur l'approximation suivante : $\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Donc $v(t + \Delta t) = v(t) + \frac{dv}{dt} \times \Delta t = v_t + a_n.\Delta t \approx v_t + \frac{\Delta v}{\Delta t}.\Delta t$ *(1)*

Or, dans notre cas, d'après l'équation différentielle établie à la question précédente : $\frac{dv}{dt} =$ *(2)*

Comme à chaque fois lors de l'utilisation de la méthode d'Euler, il est nécessaire de connaître une condition initiale, ici, elle concerne la vitesse : **$v_{(t=0)}$ = ...m.s^{-1}**

En utilisant les relations 1 et 2 et la condition initiale, remplissez les trois premières lignes du tableau ci-dessous.

t (s)	v(t) (..........)	a (t) = $\frac{dv}{dt}$ = (..........)
0		
0,04		
0,08		
0,12		

<u>* Calculs suivants :</u>

On souhaite maintenant poursuivre la résolution en utilisant un tableur.

Quelle formule allez vous appliquer dans les cases E7 et F8?

Recopier ensuite les formules vers le bas et demander la construction de la courbe représentative de $v_{cal} = f(t)$.

Comparer cette courbe à la courbe réelle.

3) En fonction du temps :

Deuxième essai de modélisation : avec l'hypothèse $f = (k'.v^2)$.

Il faut donc ré-exprimer l'équation différentielle et déterminer les valeurs des constantes.

L'équation différentielle s'écrit $\frac{dv}{dt} + Cv^2 = B$ avec $B = g(1 - \frac{\rho V}{M})$ et $C = \frac{k'}{M}$ (...)

Encadré 5 : troisième partie du protocole

L'objectif de cette partie et double. Il s'agit de résoudre numériquement une équation différentielle en utilisant Excel et de modéliser la force de frottement.

- Recherche de l'équation différentielle

Le phénomène est modélisé par une équation différentielle. Mais cette étude est faite par l'enseignant, qui estime que c'est un rappel du cours. Il rappelle alors les expressions des forces qui agissent sur le système :

Le poids ($p = mg$), la poussée d'Archimède ($\pi = \rho Vg$) et la force de frottement (modélisée par $f = kv$ puis par $f = kv^2$).

Tâche de l'enseignant

L'enseignant propose d'abord de trouver l'expression de l'équation différentielle relative au premier modèle de la force de frottement, en appliquant la deuxième loi de Newton au système :

> *« Vous cherchez l'équation différentielle sous forme* $\frac{dv}{dt} + A.v = B$ *tel que* $\frac{dv}{dt} = a$*; a c'est l'accélération … . Je veux que vous me disiez quelle est la valeur de A et quelle est son unité ; de même pour B ».*

Il rappelle la valeur de B : « elle est de 6,92 m/s^2 pour tout le monde » précise t-il. L'enseignant fait ensuite chercher la valeur de A. La valeur de k n'étant pas connue, l'enseignant rappelle que A s'obtient à partir de l'équation différentielle. Il suffit de considérer la relation entre la vitesse et l'accélération pour ce système :

> *« en considérant l'équation différentielle a + Av = B, si t tend vers l'infini la vitesse augmente et atteint une valeur limite, mais l'accélération s'annule ».*

Ce qui donne $Av_l = B$ et $A = \frac{B}{v_l}$. La vitesse limite v_l utilisée ici est celle obtenue expérimentalement. L'enseignant précise que

> *« La valeur de A n'est pas la même pour tout le monde ».*

Tâche de l'élève

L'élève exécute les consignes données dans le protocole et reprises par le professeur.

Beaucoup d'élèves se trompent dans le calcul de la valeur de A (à cause sans doute de la gestion simultanée de plusieurs données numériques).

L'enseignant vérifie la vraisemblance des valeurs de A et de B mais aussi celle de la vitesse limite.

- Résolution de l'équation différentielle

Tâche de l'enseignant

L'enseignant rappelle un élément important pour utiliser la méthode d'Euler : il s'agit de la relation $dv/dt \approx \Delta v/\Delta t$, en ajoutant :

> « *Lorsque Δt est suffisamment "petit" on peut écrire*
> $v(t + \Delta t) = v(t) + (dv/dt)*\Delta t \approx v(t) + (\Delta v/\Delta t)*\Delta t$ (...) »

S'agissant de la force de frottement de type kv^2, l'équation différentielle associée et la courbe représentative de la solution obtenue par Euler s'obtiennent de la même manière que pour la force relative au modèle de type kv.

Analyse et synthèse

1) Complexité de la démarche de validation

L'un des objectifs de ce TP est de trouver le modèle le plus pertinent de la force de frottement. Pour valider un des modèles proposés, plusieurs étapes sont envisagées. On construit des données numériques expérimentales qui sont représentées dans un graphique. On obtient ainsi une courbe expérimentale approchée qui sert de « courbe de référence ». Elle est courbe de référence puisqu'elle doit être superposée avec la courbe obtenue par la méthode d'Euler. Mais, il nous semble que juger de la pertinence d'un modèle des forces de frottement impose normalement de s'assurer de la fiabilité, à la fois, du *pas* de résolution de l'équation différentielle et des données expérimentales. Finalement, pour accomplir le principal objectif cité plus haut, la complexité de la démarche entreprise vient du fait que l'on doit valider une hypothèse ($f = kv$ ou $f = k'v^2$) par comparaison (superposition) de **courbes approchées,** l'une d'elle servant de référence ou de modèle. Ceci marque une rupture avec ce qui se fait d'ordinaire en mathématiques, comme nous le verrons plus tard.

Cette façon de faire pose une question sur la fiabilité et donc la fidélité épistémique de la courbe expérimentale : Quelle est sa "proximité" avec la courbe théorique ? Avec quelle marge d'erreur l'accepte t-on ?

Le statut de "référence" attribué à la courbe expérimentale peut être source de difficultés dans la compréhension du mode de validation d'une modélisation, qui est différent de ce qui se fait en mathématiques. On se trouve, en effet en face d'une ambiguïté qui provient sans doute de la place accordée à « l'approximation ». En effet, on ignore la marge d'erreur sur le recueil des données expérimentales pour accorder à la courbe expérimentale le statut de courbe de référence. Pourtant, cette courbe (expérimentale) doit permettre la validation du modèle de forces de frottement utilisé. On sait bien que la courbe obtenue par Euler, relativement au choix d'une expression de force de frottement, est une courbe *approchée* (de nature *théorique* puisqu'elle est obtenue à partir de la résolution numérique d'une équation différentielle[78] par la méthode d'Euler).

Les deux courbes à comparer ne sont pas de même nature ; la première, c'est-à-dire la courbe de référence, est de nature expérimentale alors que la seconde est théorique. Et toutes les deux sont construites à partir de valeurs approchées. On reste alors dans le domaine de l'approximation, c'est-à-dire dans une dialectique de l'« approché/approché » : une courbe expérimentale *approchée* joue le rôle de validation (courbe de référence) pour une autre courbe théorique *approchée*.

2) Place de l'expérience et de la modélisation

Au cours de ce TP, une grande importance est accordée à l'expérience. Le phénomène physique étudié est modélisé par une équation différentielle ; par ailleurs un modèle des forces de frottement de type n est proposé.

La première étape préconisée dans ce TP (mouvement d'une bille dans un fluide). Cette tâche est laissée à la charge de l'élève qui obtient des données numériques *réelles* mais aussi *approchées*s. Partant de ces données expérimentales, l'élève doit construire une "courbe" expérimentale qui va servir de référence comme nous l'avons déjà souligné.

Il faut aussi préciser qu'il y a deux types de **modélisation** à considérer dans ce TP :

- une première modélisation qui ne fait pas partie des objectifs de cette étude et qui concerne le phénomène lui-même : le phénomène est modélisé par une équation différentielle du premier ordre. Cette modélisation n'est pas à la charge de l'élève.
- un deuxième type de modélisation est celui de la force de frottement et c'est sur lui que porte le TP.

[78] Rappelons que l'équation différentielle provient de la modélisation mathématique du phénomène, modélisation qui n'est pas à la charge de l'élève.

Pour ce deuxième type de modélisation, deux étapes sont observées : une première étape conduisant à la construction de la courbe par la méthode d'Euler avec une force de frottement de type $f = kv$. Puis une deuxième avec une force de frottement de type $f = kv^2$. La tâche de l'élève consiste à comparer la "courbe" expérimentale et les courbes obtenues par Euler afin d'apprécier le meilleur modèle des forces de frottement. L'hypothèse de travail qui sous-tend cette pratique est que *le modèle des forces de frottement est d'autant plus pertinent que la courbe approchée est "plus proche" de la courbe expérimentale par superposition.*

On peut s'interroger sur le choix du modèle de l'expression de la force de frottement, qui est un résultat connu depuis Huygens (1690) sous forme d'hypothèse relative à la relation entre la vitesse d'un corps en mouvement et la force de frottement qui agit sur lui. L'enseignant, au cours de ce TP, n'a pas justifié son choix ni son origine (sans doute l'a-t-il déjà fait en cours). Par ailleurs, on peut bien comprendre que, pour des raisons de temps, l'on se limite aux seuls cas des modèles kv *et* kv^2 ; mais il nous semble que s'intéresser à la problématique de la recherche du « meilleur modèle » impose d'aller plus loin que considérer seulement deux cas. On peut alors faire travailler les élèves sur un modèle plus général, par exemple $f = kv^n$, et leur demander de déterminer la valeur de n pour laquelle le modèle est le plus satisfaisant.

Un autre facteur important qui influence la fiabilité du modèle est le *pas* de résolution de l'équation différentielle. Il aurait fallu laisser les élèves travailler sur la variation du pas de résolution ; sur ce point, l'enseignant nous a affirmé (à la fin de la séance) que, pour des raisons d'économie de temps, il avait déjà testé ce pas de résolution chez lui et pouvait donc se permettre de le proposer à ces élèves.

Nous avons représenté dans le tableau ci-dessous l'essentiel des étapes qui conduisent à la modélisation de la force de frottement (les nombres indiquent le rang dans l'exécution du processus).

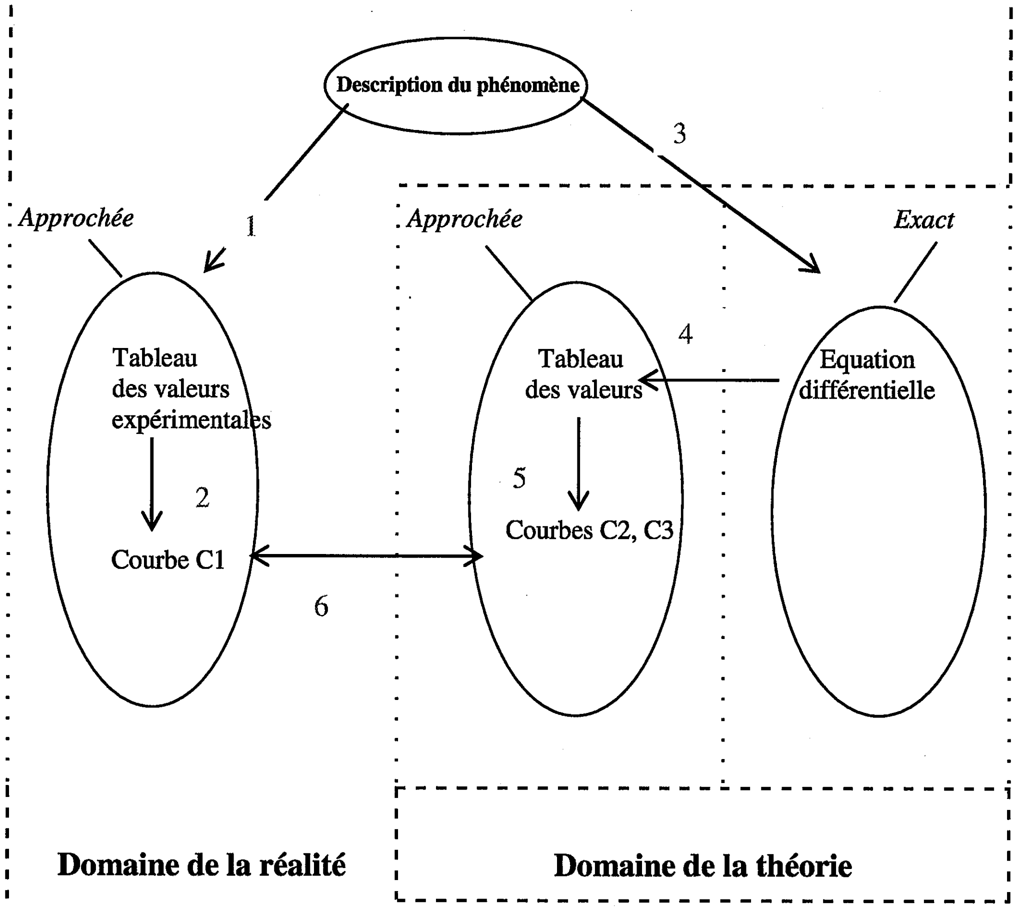


Tableau 38: Processus de modélisation de la force de frottement (simplifié)

1 : construction de la table des valeurs numériques

2 : Processus conduisant à la construction de la courbe expérimentale de référence

3 : modélisation du phénomène par une équation différentielle

4 : résolution numérique de l'équation différentielle

5 : construction de deux courbes (selon l'expression du modèle de la force de frottement)

6 : comparaison des courbes par superposition puis validation du modèle de la force de frottement.

Les trois courbes s'obtiennent à partir de la discrétisation du phénomène. Le passage de la courbe discrète à la courbe continue est géré par le logiciel tableur/grapheur ; d'ailleurs, cela ne semble pas être une préoccupation puisque l'enseignant dit à ses élèves d'utiliser une représentation (nuage de points) en choisissant la courbe continue sans toutefois tenter de justifier ce choix

3) Les principales notions mathématiques et le lien avec le cours de mathématiques

Dérivée numérique

La notion de dérivée numérique n'est pas étudiée dans le programme des mathématiques de terminale S. Elle est souvent utilisée pour fournir une approximation de la dérivée d'une fonction à partir d'un ensemble discret de valeurs. On fait l'hypothèse que l'on obtient de bons résultats sur des données initiales souvent expérimentales (valeurs discrètes) lorsqu'elles sont peu dispersées (peu "bruitées"), à condition qu'elles soient régulièrement espacées et "suffisamment" rapprochées.

On peut déjà constater qu'au cours de ce TP, la formule donnant les valeurs de la vitesse V_i correspondant aux positions y_i à l'instant t_i c'est-à-dire :

$$V_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t} \qquad \text{avec} \qquad \Delta t = t_{i+1} - t_{i-1}$$

correspond à la formule

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

qui permet d'obtenir une meilleure approximation du nombre dérivé $f'(x_0)$ par rapport à la formule habituellement utilisée dans les classes de première er terminale, à savoir

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Équation différentielle

Deux types d'équations différentielles sont traités au cours de ce TP. Le premier est l'équation linéaire $dv/dt + Av = B$, connue des élèves puisqu'à ce moment de l'année ils l'ont déjà vue en classe de mathématique sous la forme $y' = ay + b$. Le deuxième est l'équation différentielle non linéaire $dv/dt + Cv^2 = B$, obtenue avec le modèle de force de frottement en kv^2. Ce type d'équation n'est pas traité dans le programme de mathématiques de terminale S. Mais le traitement de ces deux types d'équations différentielles ne semblait pas poser de problèmes *a priori*, ni à l'enseignant (qui ne fait pas allusion au programme de mathématiques) ni aux élèves (qui ne posent pas de questions sur ces nouveaux objets).

Approximation affine

De même, en abordant la résolution numérique des équations différentielles, un certain nombre de formules sont utilisées sans les mettre explicitement en lien avec le cours de mathématiques et sans non plus les justifier.

Par exemple, l'enseignant annonce que « la méthode d'Euler s'appuie sur l'approximation $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t \approx \Delta v/\Delta t$ ». Les seules explications données sont intra-physique : « le rapport $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ représente l'accélération » en indiquant que c'est la « dérivée » de la vitesse.

En plus, l'enseignant n'a pas précisé comment on obtient la relation

$$v(t + \Delta t) = v(t)+ (\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)*\Delta t \qquad (2).$$

Ce serait pourtant une occasion pour les élèves de voir appliquer l'approximation affine déjà rencontrée en mathématique sous la forme $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$ (3),

où a est un réel d'un intervalle I, h un réel non nul contenu dans un intervalle centré sur 0 et f une fonction dérivable sur I.

Cela pouvait aussi permettre à certains élèves de s'interroger sur le signe « = » dans la relation (1) et à l'enseignant de préciser le sens attribué au caractère « approché » des valeurs numériques obtenues. La relation (1) peut être difficile à comprendre en considérant toute la relation (complète) proposée par l'enseignant :

$$v(t + \Delta t) = v(t)+ (\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)*\Delta t = v_t + a_n \Delta t \approx v_t + (\Delta v/\Delta t)*\Delta t \qquad (4)$$

Si au lieu de $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ on avait $\Delta v/\Delta t$, la première égalité aurait bien un sens. En effet, la fonction étant continue et strictement monotone entre t et $t + \Delta t$ (Δt est non nul et considéré comme très petit), on a $\Delta v(t) = v(t+\Delta t) - v(t)$. On peut par la suite arriver à la relation approximative sans nécessairement et explicitement passer par l'approximation affine.

On a : $v(t +\Delta t) = v(t) + \Delta v(t) = v(t) + \Delta v(t) * (\Delta t/\Delta t) = v(t) + (\Delta v(t)/\Delta t)*\Delta t$

La relation $(dv/dt)_t \approx \Delta v(t)/\Delta t$ aidant (souvent écrite $dv/dt \approx \Delta v/\Delta t$, pour tout réel t du l'intervalle considéré), on arrive à la formule d'approximation attendue, qui correspond bien à la formule (2) de l'approximation affine : $v(t +\Delta t) \approx v(t) + (dv/dt)_t*\Delta t$ (5)

4) Interview accordée par l'enseignant

Nous savons que les élèves de cette classe ont déjà vu, en mathématiques, la résolution algébrique de l'équation différentielle de type $y' = ay + b$. La plupart de ces élèves nous ont affirmé n'avoir pas encore vu la méthode d'Euler en mathématique cette année. Très peu parmi eux (trois au total sur 30) ont vu la méthode d'Euler l'année précédente en classe de première.

Dans le protocole de ce TP, une partie est réservée à la "résolution d'une équation différentielle". Dans le travail qui a été fait, après avoir rappelé le principe de la méthode d'Euler, l'enseignant n'a pas évoqué, ni au début ni à la fin, la ou les solution(s) de l'équation différentielle. Ce qui semble être privilégié, et à juste titre, c'est la représentation graphique de la solution constituée à partir de valeurs numériques. Nous avons donc interrogé l'enseignant sur cette précision.

Résoudre une équation différentielle c'est en déterminer la ou les solutions. Pensez-vous que vos élèves sont désormais capables d'identifier la ou les solutions de l'équation différentielle résolue par la méthode d'Euler ?

Enseignant : *en général, une fois rappelé le prince de la méthode d'Euler, on veille à ce qu'ils tracent bien la courbe en tenant compte du pas de résolution, et ils le font bien sauf pour quelques-uns.*

Vous avez rappelé la formule : $v(t + \Delta t) = v(t) + (dv/dt)*\Delta t$. Savez-vous que vos élèves utilisent déjà cette formule en mathématiques ? C'est la formule donnant l'approximation affine d'une fonction au voisinage d'un point : [Montrer la formule $f(a+h) \approx f(a) + f'(a).h$]

C'est vrai que j'ai discuté un peu avec leur prof de maths, mais je ne connais pas très bien ce qu'ils font en maths.

Que pensez-vous des intentions des concepteurs des programmes et documents d'application sur un travail conjoint entre mathématiciens et physiciens à propos de l'enseignement des équations différentielles ?

Les équations différentielles et bien d'autres notions mathématiques constituent des domaines où les élèves retrouvent effectivement une réelle application des formules vues dans le cours de mathématiques. C'est une bonne chose de développer un enseignement conjoint sur un thème donné ; mais cela demande beaucoup de travail par ailleurs.

Si l'on se réfère au discours de l'enseignant lors de la séance de TP et aux réponses aux questions que nous lui avons posées à la fin de la séance, celui-ci semble adopter le point de vue du « physicien » à propos de la résolution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler. Il ignore ce que son collègue mathématicien fait ; cela ne semble pas le gêner pour autant, dès lors qu'il arrive à expliquer aux élèves la manière d'utiliser les formules et autres procédés mathématiques dont ils ont besoin.

IV.4. Synthèse

Les observations des classes que nous avons menées confirment l'absence de dialogue entre les enseignants des deux disciplines autour des certains objets de savoirs qui sont étudiés dans une même classe (méthode d'Euler, équation différentielle, approximation, tangente). L'introduction de la méthode d'Euler dans les deux classes se fait selon "des points de vue" différents et non-complémentaires (ce qui est contraire aux intentions des programmes sur la continuité didactique) :

- Le travail fait dans le cours de mathématiques ne prépare pas à l'introduction de la méthode d'Euler en physique. Comme dans les manuels, on ne parle pas de résolution numérique d'une équation différentielle. L'accent est plutôt mis sur la construction d'une courbe approchée de la fonction exponentielle.

- Dans le TP de physique, l'utilisation de l'approximation affine (notion fondamentale sur laquelle dans le TP de mathématiques sur la méthode d'Euler) est très implicite. La relation avec le cours de mathématiques à leur sujet, n'est pas faite.

De plus, en physique on utilise la dérivée numérique (symétrique) alors que cette notion n'est pas explicitement étudiée dans les programmes des mathématiques.

IV.4.1. Rappel mathématiques : approximation du nombre dérivé

a) La dérivée numérique (symétrique)

Un petit rappel mathématique avant de commenter la formule de la dérivée numérique utilisée en physique. En analyse numérique, grâce au principe d'interpolation polynomiale, on peut établir des formules donnant l'approximation du nombre dérivé en x_0.

1) en considérant un polynôme de degré 1 passant par les points $(x_0 ; f(x_0))$ et $(x_1 ; f(x_1))$,

en posant $h = x_1 - x_0$, grâce à la formule d'interpolation de Newton on arrive à :

$$f'(x_0) = (f(x_0 + h) - f(x_0))/h - hf''(\xi_0)/2 \text{ pour } \xi_0 \in [x_0 , x_1]$$

En prenant $\quad f'(x_0) \approx (f(x_0 + h) - f(x_0))/h \qquad (1)$

On commet une erreur $E_1 = hf''(\xi_0)/2$ pour $\xi_0 \in [x_0 , x_1]$

(1) est la formule habituellement utilisée dans les classes de première et terminale (on a l'égalité quand h est égal 0)

2) en considérant le polynôme P_2 de degré 2 passant par les points d'abscisse x_{-1}, x_0 et x_1 régulièrement espacés on peut trouver :

$f'(x_0) = 1/2h*[f(x_{-1}) - f(x_1)] - h^2/6f'''(\xi_0)$, $\xi_0 \in [x_{-1}; x_1]$

Si on pose $h = x_0 - x_{-1} = x_1 - x_0$, $f'(x_0)$ s'écrit :

$f'(x_0) = 1/2h*[f(x_0 - h) - f(x_0 + h)] - h^2/6f'''(\xi_0)$ $\xi_0 \in [x_0 - h ; x_0 + h]$

L'erreur E_2 commise en considérant

$f'(x_0) \approx 1/2h*[f(x_0 - h) - f(x_0 + h)]$ (2)

s'exprime par $E_2 = h^2/6f'''(\xi_0)$ $\xi_0 \in [x_0 - h ; x_0 + h]$

On démontre que l'erreur E2 est toujours inferieure à E1, ce qui veut dire qu'on a une meilleure approximation dans le cas (2) que dans le cas (1).

Nous pouvons l'illustrer par un exemple.

On se propose d'estimer la dérivée de $f(x) = ln(x)$ en $x_0 = 1$ sachant que la valeur exacte est $f'(1) = 1$. Nous donnons dans le tableau ci-dessous une estimation de $f'(1)$ et de l'erreur commise en considérant la formule de premier ordre $f'(x_0) \approx (f(x_0 + h) - f(x_0))/h$ et en faisant varier le pas d'un facteur de $(1/2)^n$. On peut comparer ces résultats avec ceux obtenus en utilisant la formule centrale (dérivée symétrique) $f'(x_0) \approx 1/2h*[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)]$.

h	$f'(x_0) \approx (f(x_0 + h) - f(x_0))/h$	Erreur	$f'(x_0) \approx 1/2h*[f(x_0+h) - f(x_0-h)]$	Erreur
0,1	0,953101798	0,0468982	1,003353477	0,00335348
0,05	0,975803283	0,02419672	1,000834586	0,00083459
0,025	0,987704504	0,0122955	1,000208411	0,00020841
0,0125	0,9938016	0,0061984	1,000052088	5,2088E-05
0,00625	0,99688796	0,00311204	1,000013021	1,3021E-05
0,003125	0,998440748	0,00155925	1,000003255	3,2552E-06
0,0015625	0,999219563	0,00078044	1,000000814	8,138E-07
0,00078125	0,999609578	0,00039042	1,000000203	2,0345E-07
0,00039063	0,999804738	0,00019526	1,000000051	5,0863E-08
0,00019531	0,999902356	9,7644E-05	1,000000013	1,2716E-08
9,7656E-05	0,999951175	4,8825E-05	1,000000003	3,1786E-09
4,8828E-05	0,999975587	2,4413E-05	1,000000001	7,9382E-10

Ce tableau montre que la précision sur l'approximation de la dérivée en $x_0 = 1$ s'améliore pour les valeurs de h de plus en plus petites. En plus, pour une même valeur de *h*, la valeur approchée de $f'(1)$ est meilleure avec la formule centrale (dérivée symétrique d'ordre 2) qu'avec la formule non centrale d'ordre 1.

Ce constat montre que la précision du résultat est meilleure à mesure que *h* diminue.

b) Le lien avec les programmes de mathématiques

On peut s'interroger si la dérivée symétrique apparait dans le programme de mathématiques et à quel niveau.

La notion de dérivée symétrique est absente des programmes des mathématiques. Pourtant son rapport institutionnel n'est pas totalement nul. On la retrouve dans plusieurs endroits.

En premières S, le programme suggère plusieurs approches pour introduire la notion de la « dérivée ». Le document d'accompagnement dudit programme en propose quelques exemples dont celle relative à l'étude de la vitesse instantanée.

> Situation3 : quelle vitesse instantanée ?
>
> La démarche suivant peut être proposée (en liaison avec l'étude de la chute des corps faite en physique).
>
> Soit un mobile dont la distance à un point origine est donnée en fonction du temps par la fonction $d : t \mapsto t^2$. On sait calculer la vitesse moyenne entre les instants 1 et 2, 1 et 3, 2 et 5, etc. ... comment définir la vitesse à l'instant 2 ? le calcul de la vitesse moyenne entre deux instants symétriques par rapport à 2 (1 et 3 ; 1,5 et 2,5 ; 1,9 et 2,1 ; 1,95 et 2,05 ; etc.) amène à s'intéresser au quotient $\frac{(2+h)^2-(2-h)^2}{2h}$ qui vaut toujours 4 ! d'où une première méthode pour trouver la vitesse instantanée.

Encadré 6 : extrait du document d'accompagnement de programme de 1er S (p. 62)

Le but est de montrer après que cette formule $\frac{f(a+h) \;\; -f(a-h)}{2h}$ ne peut s'applique dans certains cas (comme dans la valeur de x en 0). D'où la nécessité de rechercher une autre formule.

Nous avons retrouvé dans les manuels de 1e S des traces des situations sur la dérivée symétrique.

L'exercice 83 du manuel Math'x, p. 88 reprend l'essentiel de la situation 3 mais dans un contexte intra-mathématique.

L'exercice 103 du manuel Belin p. 77 fait calculer à l'aide d'une calculatrice le nombre dérivée de la fonction $x \mapsto 1/x$ en 0. Le but est de montrer que pour donner une valeur approchée de f'(a), au lieu de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, la calculatrice telle que la TI 82 utilise la formule $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ avec h "petit".

Cette notion n'apparaît pas dans le programme de terminale S ni dans les manuels que nous avons analysés.

Remarque :

Le problème proposé dans le sujet de CAPES interne 2004 avait pour thème « l'étude de la dérivation symétrique » dont un lien est fait avec la dérivation « usuelle ». La troisième partie de ce problème s'intéressait à deux approximations de $f'(0)$ pour l'exponentielle népérienne.

c) Intérêt de la dérivée symétrique dans les programmes de physique

En physique, dans les manuels que nous avons analysés (notamment en mécanique) apparait une utilisation de la notion de dérivée symétrique. L'intérêt réside dans le fait que dans la plupart des cas, le recueil des données se fait par intervalle temps régulier. Dans le cas du mouvement d'un point mobile, la notion de la vitesse instantanée devient facile à définir comme on peut le voir dans cet extrait de manuel Microméga :

> On a enregistré la position d'un point mobile M toutes les 50 ms (Doc1). La valeur V_3 de la vitesse instantanée d'un point d'un point mobile M à la date t_3 est égale à la vitesse moyenne de ce point calculée entre les dates t_2 et t_4 encadrant t_3 et aussi proche que possible de t_3 :
>
> $V_3 = \dfrac{M_2M_4}{t_4 - t_2}$. (...) le vecteur $\vec{V_3}$ du point mobile M à la date t_3 est tangent à la trajectoire en M_3.

Cette approche permet d'établir des liens entre la notion de vitesse d'une part et celles de dérivée, tangente et limite/approximation, d'autre part. Ces notions font pourtant partie du champ conceptuel de la méthode d'Euler. On peut donc considérer qu'en amont de l'introduction de la méthode d'Euler, la dérivée symétrique mérite, comme les équations différentielles, de faire l'objet d'un travail conjoint entre les deux disciplines dans le cadre d'une continuité didactique. Ce travail ne se fait malheureusement pas.

V. Quel souvenir des équations différentielles chez les étudiants rentrant à la faculté ?

Nous voulons terminer ici en citant quelques éléments de résultats d'une enquête réalisée en septembre 2005 dans le cadre de la mise en place d'un nouveau module L1S1 (premier semestre de la première année de licence de la structure LMD) intitulé "évolution des systèmes"[79] et dont le fil directeur est la modélisation de l'évolution de systèmes (électriques, mécaniques, populations, etc.). Les équations différentielles y occupent évidemment une place centrale (voir annexe). Ce questionnaire, auquel nous avons participé, a été passé dans le cadre d'un travail mené à DidaScO au niveau de l'enseignement supérieur par Mme Claude Cabot[80].

[79] Responsable ; Jean-Pierre Maillet, université Paris 11, IPN - Orsay
[80] IPN - Orsay

V.1. Conception du questionnaire

Au niveau de la construction, le questionnaire mêle questions fermées et ouvertes. Pour les questions offrant un choix de réponses (cases à cocher, non exclusives) la justification est généralement demandée (souvent seule information pour réellement analyser les réponses). (voir annexe 5).

La première question portait sur la "nature" des équations différentielles. L'objectif était de savoir s'il y a une prédominance de la dérivée première ou nécessité de la présence d'une dérivée seconde, si l'idée du caractère fonctionnel leur est bien associée et s'il y a éventuellement l'idée d'une équation que l'on ne peut pas résoudre mathématiquement. Les items ont été déterminés en conséquence.

La deuxième question demandait un exemple d'équation différentielle. Là encore, l'interrogation portait sur la prédominance de la dérivée première mais aussi sur la question de l'écriture, la forme $y' = ay + b$ apparaissant comme une forme "canonique" des équations différentielles du 1er ordre dans l'enseignement secondaire français. La seconde partie de cette question portait évidemment sur la solution de l'équation donnée, accompagnée d'une justification. L'idée ici était de savoir si les étudiants avaient bien associé la solution à l'équation qu'ils avaient écrite.

La troisième question était centrée sur le lien avec la physique. Il s'agissait de savoir ce que les étudiants avaient retenu de l'application des équations différentielles à la physique. Compte tenu de l'ensemble des exemples vus en terminale (chute libre, chute freinée, circuit RC, circuit RL, circuit RLC, décroissance radioactive) deux exemples (permettant éventuellement de donner un cas au 1er ordre et un cas au 2^{e} ordre) étaient demandés.

La quatrième question concernait spécifiquement la méthode d'Euler, introduite explicitement en mathématique, comme nous l'avons vu pour la construction de la courbe approchée de la fonction exponentielle et en physique et pour la résolution numérique d'équations différentielles. L'interrogation portait sur la représentation qu'avaient pu se faire les élèves au cours de leur année de terminale. Il s'agissait de recueillir leur point de vue sur cette méthode, c'est-à-dire de savoir si elle est perçue comme une méthode mathématique, purement informatique ou une approximation de physicien.

La dernière question, en trois sous-questions, visait à connaître leur impression globale de l'articulation maths-physique. Résoudre un problème de physique comportant une équation différentielle, est-ce faire de la physique ou bien faire des maths ?

V.2. Résultats

Le dépouillement a été effectué en mettant de côté les étudiants ne venant pas de terminale. Les pourcentages donnés ci-après sont calculés sur un nombre de réponses compris entre 100 et 150 suivant les questions.

V.2.1. La question du caractère fonctionnel de l'équation

Le résultat des décomptes est clair puisque 90 % des étudiants ont coché la case "dont la solution est une fonction".

V.2.2. La question de la prédominance de la dérivée première

On trouve 34 % d'étudiants qui ne font référence qu'à la "dérivée première" et 51 % des étudiants ont associé la dérivée seconde. Ce résultat est intéressant si l'on a en mémoire la forte dissymétrie présente dans l'enseignement secondaire : les équations différentielles du second ordre apparaissent en effet en physique pour les oscillations mécaniques et électriques, mais ne sont pas au programme de mathématiques. Cette dissymétrie apparaît par contre de façon frappante dans la question suivante du questionnaire, puisque seules 4 étudiants donnent un exemple du 2e ordre (dont seulement 2 donnent un exemple correct du type $y'' + ky = 0$).

V.2.3. Solution et résolution

Si on ne tient pas compte d'erreurs pouvant être considérées comme d'inattention (erreur de signe notamment), 64 % des réponses concernant la solution de l'équation sont satisfaisantes et 20 % sont des réponses fausses.

Concernant la justification, l'absence de réponse s'élève à 74 % (non-réponses et "je ne sais pas"), et parmi celles données pour les équations différentielles du 1er ordre, il s'agit de la définition même de la fonction exponentielle (13 %) ou de la vérification en reportant dans l'équation (7 %).

Ces résultats sont en accord avec ce que l'on pouvait prévoir. Même s'il on tient compte de ce que la question de la "justification" est très souvent ignorée dans ce type de questions, on peut considérer le taux de non-réponse comme significatif, et, pour les justifications données, on ne trouve évidemment que les deux seules possibles, compte tenu du programme de mathématiques.

V.2.4. Les exemples d'application en physique

Les principales réponses évoquent de façon plus ou moins détaillée le cas de la charge du condensateur et des circuits RL ou RLC. Pour autant, très peu d'étudiants donnent une équation différentielle pour préciser leur réponse (quelques cas, évoquant la charge du condensateur essentiellement). Si la radioactivité est une réponse assez souvent donnée, elle est curieusement du même ordre de grandeur que les réponses considérées comme "fausses" (où les phénomènes cités, tel le mouvement de satellites par exemple, ne fait pas l'objet d'une modélisation par ED).

Ceci est conforme à la place accordée à ces études dans le programme de physique, y compris le fait que peu de manuels associent la notion d'équation différentielle à la radioactivité ; c'est très souvent la charge du condensateur qui fait l'objet de cette introduction.

V.2.5. La méthode d'Euler

Tous les étudiants ont répondu (seules 2 copies n'ont pas de réponse) et la majorité d'entre eux ont coché à la fois "mathématiques" et "physique" : 64 % (mathématique) et 56% (physique). Seuls 4 % des étudiants ont coché "informatique".

Ce résultat montre donc que les étudiants ont bien le souvenir de la méthode d'Euler et que celle-ci est bien rattachée à la fois aux mathématiques et à la physique.

V.2.6. Perception des équations différentielles

Les réponses montrent une bonne parité des aspects mathématique et physique (respectivement 15 et 19 %), et les commentaires font clairement apparaître la partie mathématique comme liée à la "méthode de résolution" et la partie physique comme celle liée au problème lui-même. Les mathématiques sont à plusieurs reprises qualifiées d'outil au service de la physique.

Pour ce qui concerne les mathématiques, la réponse première est "facile" (72 %), l'explication étant que si l'on a bien compris la logique du calcul, si on sait la méthode, "c'est toujours pareil" (*sic)* : il n'y a pas beaucoup d'équations différentielles de formes différentes.

Les réponses sont plus variables pour la physique : la difficulté est plus souvent mentionnée (59 %), associée à la nécessité qu'il y a de tenir compte de nombreuses grandeurs, de conditions initiales, et d'avoir à la fois l'équation à écrire et l'interprétation physique de la solution à faire. Cependant, pour certains étudiants, les exercices de physique sont plutôt faciles car, soit il s'agit d'appliquer une méthode mathématique, soit il s'agit de situations concrètes qui aident à comprendre et guident la résolution.

CONCLUSION, PERSPECTIVES

Notre étude a porté sur le rôle et la place des équations différentielles dans les programmes de mathématiques et de physique en Terminale S. Le choix résulte de la mise en application de nouveaux programmes en 2002, où mathématiques et physique sont mis en relation forte au niveau de la modélisation de phénomènes par des équations différentielles du premier ordre (qui constituent une nouveauté dans l'enseignement de la physique[81]). Dans le même temps, une autre innovation est mise en place dans les deux disciplines : le traitement numérique approché par la méthode d'Euler, lié pour partie à la volonté d'intégration des technologies dans l'enseignement.

Un tel changement conduit traditionnellement à des difficultés de mise en place, tant par la nouveauté du contenu que par l'intention didactique d'interdisciplinarité qui est affichée. Le jeu des contraintes institutionnelles et celui des habitudes (voire des traditions) des enseignants, imposent une gestion en grande partie indépendante des disciplines, de sorte que les intentions des programmes, confortées par les documents d'accompagnement, ne peuvent conduire à une réelle interdisciplinarité. Nous estimons cependant possible (si ce n'est nécessaire) de mettre en place ce que nous avons appelé une "continuité didactique" entre les mathématiques et la physique.

Il s'agissait donc d'analyser en particulier :

- la place et le rôle des équations différentielles dans les manuels scolaires de mathématiques et de physique et la continuité didactique entre ces deux disciplines à ce niveau.
- si la méthode d'Euler, présente dans les deux disciplines, constitue un champ propice à la continuité didactique.

[81] Paradoxalement, les équations du second ordre ne figurent plus dans les programmes de mathématiques.

- la manière dont les enseignants des deux disciplines perçoivent cette continuité didactique et la mettent en œuvre avec leurs propres élèves.

L'étude de quelques travaux sur la modélisation utilisant les équations différentielles nous a vite montré la complexité des questions que nous voulions traiter, mais aussi la multiplicité des approches possibles pour cette étude. Nous avons choisis d'aborder les questions à étudier suivant une approche "inter-didactique" (mathématiques - physique) et selon des cadres théoriques complémentaires :

théorie anthropologique des savoirs (Y. Chevallard) pour caractériser le rapport institutionnel des équations différentielles avec les notions *d'habitat* (approche écologique des savoirs) et d'*organisation mathématique mixte* (approche praxéologique) ;

les cadres de rationalité (A. Lerouge) et les registres sémiotiques (R. Duval) pour caractériser la nature des "jeux d'allers-retours" entre les deux disciplines dans les situations de modélisation.

I. Bilan

I.1. Quelle continuité didactique dans les manuels scolaires ?

I.1.1. Sur le fond : modélisation et cadres de rationalité

La modélisation, explicitement mentionnée dans le programme de mathématiques, est par nature l'une des activités principales du physicien. Dans les manuels scolaires, l'activité "modélisation" est effectivement centrale dans les chapitres concernés par les équations différentielles.

Pour la plupart des situations de modélisation traitées en mathématiques, le champ de départ est un domaine de la physique. Cependant l'analyse des transitions entre le champ de départ et le champ de traitement qui correspond donc à des changements de cadre de rationalité, révèle des difficultés tant du point de vue de la formulation des énoncés que de celui de la traduction mathématique de ces énoncés. Le passage du champ de départ au champ de traitement est souvent pris en charge par l'énoncé. Nous avons qualifié de *fausse continuité* l'absence des tâches de transitions, mais aussi le manque de cohérence, du point de vue de la physique, de certaines situations qui apparaissent dans les manuels de mathématiques. Ces résultats viennent confirmer plusieurs études menées auparavant dans ce domaine, dont la plus récente est la thèse de Rodriguez (2007). Ce sont aussi les problèmes "classiques" liés à l'habillage des problèmes en mathématiques (B. Dumont, 1980)

De même, dans les manuels de physique, il apparaît clairement que le jeu des cadres de rationalité (mathématiques-physique) ne se fait pas sans difficultés. On y relève aussi parfois une absence de tâche de transition physique-mathématiques ou mathématiques-physique; ce qui laisse augurer l'existence de nombreux implicites, difficilement exploitables par l'enseignant et plus encore par les élèves. Il y a très peu de retours à la confrontation expérimentale et à l'analyse "physique" de la solution de l'équation différentielle, ce qui est dommageable à compréhension véritable de cette étude. On peut aussi signaler ce manque de cohérence entre les manuels de physique et ceux des mathématiques pour ce qui concerne le cas de la radioactivité : aucun exercice n'est proposé à leur sujet en physique alors que ce domaine a été précisément pris comme exemple par le GEPS de mathématiques.

I.1.2. Sur la forme (1) : axe praxéologie

Nous avons pu identifier un certain nombre de tâches qui peuvent se ramener à quelques types. Il s'agit de :

(T1) : déterminer une équation différentielle

(T2) : résoudre (algébriquement) une équation différentielle

(T3) : vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

(T4) : résoudre (numériquement) une équation différentielle

Dans les manuels de mathématiques, en ne considérant que les situations extra-mathématiques, le type de tâche (T2) est celui qui apparait le plus souvent dans les huit manuels analysés (57%), contre 29% pour (T1), 8% pour (T3) et 6% pour (T4). On peut remarquer que le type de tâche (T1) ne consiste pas en une "mise en équation différentielle". Il s'agit du cas où une équation différentielle est donnée sous "la forme du physicien" et où l'on demande son écriture sous la "forme du mathématicien". C'est un jeu d'écriture qui est attendu.

Par ailleurs, en physique, le type de tâche (T2) n'est pas conforme au programme ; mais nous l'avons retrouvé dans quelques manuels.

Technique intra-mathématique

S'agissant du type de tâche (T3), la technique utilisée en mathématiques pour l'accomplir, est disqualifiée en physique. Il en découle, dans les deux institutions, deux organisations mathématiques "mixtes" différentes qui recouvrent en réalité des attentes différentes : en physique la tâche ne consiste pas à « vérifier », mais à « déterminer des constantes », ce qui laisse penser que la solution d'une équation différentielle du premier ordre nécessite la détermination de trois constantes (!). De plus, on impose de nouveau aux élèves une prise de distance par rapport aux notations : la variable est notée "t" et non "x", et, l'expression générique de la solution est $u(t) = Ae^{at} + B$ et non pas $y = Ce^{ax} - b/a$.

Techniques mathématiques versus technique physique

Nous avons aussi repéré des types de tâches connexes, aussi bien dans les manuels de mathématiques que ceux de physique :

(T5) : déterminer analytiquement une propriété de la solution (temps caractéristique, valeur limite quand t -> infini, etc.).
(T6) : travailler sur une représentation graphique.
...

Pour un même type de tâche (par exemple, déterminer la vitesse limite ...), on a pu observer différentes techniques : une technique "mathématique" (respectivement "physique") dont les éléments du bloc technologico-théorique sont issus des mathématiques (respectivement de la physique).

Cependant l'existence de techniques différentes, mais qui se rapportent à un même type de tâche, ne fait l'objet d'aucun commentaire dans les manuels. Les résultats des entretiens que nous avons eus avec les enseignants laisser penser que les deux disciplines s'ignorent complètement à ce sujet ; ce qui peut accroitre les difficultés des élèves.

Technique mathématique utilisée en physique mais absente en mathématiques

Certaines situations en physique font apparaitre le besoin de trouver graphiquement la constante de temps (tâche connexe). Plusieurs techniques apparaissent alors, dont celle qui conduit à l'utilisation du logarithme solution de l'équation différentielle (voir p.185). Cette technique est inexistante dans les manuels de mathématiques.

I.1.3. Sur la forme (2) : axe registres sémiotiques

L'analyse des manuels a permis de constater la diversité de registres utilisés aussi bien en mathématiques qu'en physique. Cependant, certains registres sont sous-exploités ou ne sont pas du tout utilisés. C'est le cas en mathématiques du registre des schémas électriques (certains sont parfois erronés).

En physique, il y a très peu de traitement dans le registre des représentations graphiques. Les activités se limitent la plupart du temps à la lecture d'une valeur particulière sur un graphique qui est donné. On peut regretter parfois l'absence d'une tâche de transition (d'interprétation) du graphique (RG) qui permettrait de revenir à une explication du phénomène en utilisant soit de l'expression le temps caractéristique (RS) ou sa valeur numérique (RN), avec une mise en correspondance de l'équation différentielle (RS).

I.2. Place et rôle de la méthode d'Euler

La méthode d'Euler a été introduite dans les nouveaux programmes de mathématiques et de physique comme un point-clé du lien entre les deux disciplines. Dans notre étude, nous avons croisé les résultats d'une analyse des manuels et ceux issus du questionnaire, des entretiens et des observations de classes.

Il en ressort que les manuels scolaires de mathématiques et de physique suivent à la lettre les instructions des programmes respectifs. Mais une nette différence apparait au niveau du statut consacré à la méthode dans les deux disciplines : en mathématiques, la méthode permet la construction de courbes approchées de l'exponentielle ; en physique, elle est à la fois une méthode de résolution numérique d'une équation différentielle et un outil de validation de modèle (forces de frottements en kv^n, avec n un nombre entier ou décimal). On ne parle de « résolution numérique » qu'en physique et presque jamais en mathématiques. De plus, il y a très peu d'évocation de l'autre discipline dans la mise en œuvre de cette méthode. La distance entre les deux disciplines, tant dans la présentation de la méthode que dans les notations associées et les utilisations, donne l'impression qu'il existe deux méthodes d'Euler différentes en mathématiques et en physique. On peut alors s'interroger sur la compréhension "schizophrène" que peuvent développer les élèves de ce qui doit leur apparaître comme deux méthodes différentes.

Pour ce qui concerne l'enseignement de la physique, il apparaît que la méthode d'Euler a en quelque sorte "phagocyté" l'équation différentielle du premier ordre (ce qui n'était probablement pas l'intention des auteurs du programme). En témoignent les nombreux articles publiés dans *Le Bup* concernant les équations différentielles, tous centrés sur la mise en œuvre de méthodes numériques, que ce soit sur calculette ou sur tableur.

I.3. Quelle réalité sur le terrain ?

Les résultats du questionnaire que nous avons collectés auprès des enseignants des deux disciplines nous a permis de constater une réticence des enseignants de mathématiques pour deux principales raisons :

- c'est une approche légitimée en fait par l'autre discipline (*on doit le faire parce que les physiciens en ont besoin !*)
- difficulté supplémentaire apportée par l'outil informatique, encore peu répandu (dans le domaine de l'analyse) dans les classes.

En physique, ce questionnaire montre que le "succès" de la méthode d'Euler repose sur des arguments essentiellement techniques (intérêt de l'outil informatique, par ailleurs déjà bien implanté dans les activités en physique-chimie[82]).

D'une manière générale, les résultats de cette partie de notre étude confirment les difficultés de dialogue entre les enseignants des deux disciplines autour de certains objets de savoirs qui sont étudiés dans une même classe (méthode d'Euler, équation différentielle, approximation, tangente).

Une analyse croisée des résultats du questionnaire, des entretiens, et les observations de classes nous a conduit à identifier quelques régularités en rapport avec la continuité didactique prônée par les programmes scolaires.

Difficultés chez les enseignants à trouver le temps et un cadre approprié pour développer un vrai dialogue entre collègues. Les Travaux Personnels Encadrés (TPE) sont supprimés en terminale S alors qu'ils pouvaient être le lieu indiqué pour ce type d'échange. L'une des conséquences en est le constat de voir que les connaissances qui sont utilisées dans une discipline ne sont pas reprises dans l'autre.

[82] Cf. *Outils informatiques d'investigation scientifique*, UdP-INRP, 1995

Malgré parfois la volonté manifestée par des enseignants des deux disciplines à développer un travail conjoint, des difficultés sont évoquées par rapport aux thèmes qui doivent être abordés par l'autre collègue, mais surtout à la manière de le faire ;

le refus de certains enseignants de mathématiques de travailler sur des situations de modélisation qu'ils trouvent trop difficiles pour les élèves et pour eux.

le renvoi par l'enseignant de physique de certaines parties de son programme sur les situations de modélisation au cours de mathématique.

II. Prolongements et perspectives

Notre travail possède bien évidemment ses propres limites.

Pour ce qui concerne l'analyse des manuels, nous nous sommes appuyé quasiment exclusivement sur les éditions 2002[83]. Or on sait que la réalisation de tels manuels est souvent hâtive, représente un travail très lourd, parfois commencé avant même la publication des programmes définitifs[84]. La production de ces ressources pédagogiques est à l'évidence centrée sur la transmission des contenus notionnels de chaque discipline. Pour de nouvelles éditions, nous serions en droit d'attendre une réelle prise en compte d'éléments didactiques tels que les registres sémiotiques et les cadres de rationalité, et, bien évidemment une meilleure continuité, sur le fond et sur la forme, entre les deux disciplines. Le travail pourrait donc être prolongé dans ce sens, ainsi qu'au niveau des ressources électroniques mises à disposition sur les sites académiques.

Une autre limite de ce travail réside dans le fait que l'enquête menée auprès des enseignants n'a pas permis de travailler avec un échantillon représentatif. Les cent enseignants ayant répondu au questionnaire (50 en mathématiques et 50 en physique) sur la base de volontariat, ne peuvent permettre de caractériser et de généraliser les points de vue des enseignants des lycées français. De plus, il faudrait s'intéresser plus particulièrement aux enseignants (de mathématiques et de physique) intervenant dans une même classe, afin de mieux cerner les interactions/échanges possibles (ou non). Certes les entretiens semi-directifs, que nous avons

[83] Surtout en physique où les nouvelles éditions de certains ouvrages ne sont apparues qu'après 2006.

[84] Et bien avant la publication des documents d'accompagnement, notamment en physique.

passé, tenaient compte de ce fait : deux enseignants d'une même classe. Mais là aussi, le nombre d'entretiens ne permet de donner qu'une idée des réalités des classes. Il est clair pour nous que toute poursuite du travail de cette thèse doit reposer sur une étude détaillée du terrain (pratiques des enseignants, étude des difficultés des élèves), mais ceci nécessite la mise en œuvre de moyens lourds et d'une méthodologie spécifique.

Cependant, sur la base de notre travail, on peut envisager des prolongements d'ores et déjà sous forme de propositions plus institutionnelles : proposition en direction du ministère d'ajustement des programmes de mathématiques (sur le traitement des équations différentielles et l'introduction de la dérivée symétrique par exemple) et de physique (notamment sur les compétences exigibles en physique) et constitution de documents didactiques à l'attention des enseignants (sur un site internet). L'analyse praxéologique comparative que nous avons faite conduit en effet à des propositions d'exercices "prototypiques" permettant d'expliciter et de coordonner les jeux de cadres mathématiques et physique (voir annexe n°3).

Du côté de la formation des enseignants, notre travail montre qu'il y a matière à des formations didactiques "mixtes" mathématiques-physique [85]sur le seul domaine des équations différentielles.

[85] à l'image de la journée de formation continue, organisée par l'équipe de didactique d'Orsay (Université Paris-Sud), à laquelle nous avons participés.

BIBLIOGRAPHIE

Alibet, D. & *al.* (1987) : Le thème "différentielle". Un exemple de coopération Maths-physique dans la recherche. In *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques.* Vergnaud & *al.* (Édit). Colloque CNRS, GRECO.

Arslan, S. (2005) : *L'approche qualitative des équations différentielles en classe de Terminale S : Est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences ?* Thèse de doctorat. Université Grenoble 1

Artaud, M. (1997) : La problématique écologique – un style d'approche didactique, In *Actes de l'école d'été de didactique de mathématiques*, Houlgate. p. 101-139

Artigue, M. (1992) : Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire, *Cahier du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique de Grenoble*, édition IMAG, p. 183-209

Artigue, M. (1996) : Réformes et contre-réformes de l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994). In *Les sciences au lycée.* Belhoste B et al. (Édit). INRP ; Vuibert. P. 195-208

Artigue M. & Viennot L. (1986) : La notion de différentielle en mathématiques et en physique dans l'enseignement supérieur. *In Actes de la IVe école d'été de didactique des mathématiques.* Paris : IREM de Paris 7.

Artigue M. & al. (1998) : Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques en au lycée. *Cahier de DIDIREM* n°4. IREM –Université D. Diderot Paris 7

Arzarello, F & al. (2001) : A model for analysing algebraic processes of thinking. Kluwer-Ac. Publisher.

Astolfi, J.-P. & Develay M. (1989) : *La transposition didactique.* In La didactique des sciences, PUF, Que sais-je ? Paris.

Atten, M. (1996) : La reine mathématique et sa petite sœur. *Les sciences au lycée.* In Belhoste, B & *al.* (Édit) INRP, Vuibert pp. 45-52

Bâ, C. (2007) : *Etude épistémologique et didactique de l'utilisation du vecteur en mathématiques et en physique – lien entre mouvement de translation et translation mathématique.* Thèse de doctorat (co-tutelle). Université Lyon 1 et Université Cheikh Anta Diop.

Balacheff, N. (1994) : didactique et intelligence artificiel. *Recherche en didactique des mathématiques*, Vol. 14/1.2, p. 9- 42

Balacheff, N. (2002) : Cadre, Registre et conception. *Les cahiers du laboratoire* Leibniz. Grenoble.

Balian, R. & Zinn-Justin, J. (2005) : Mathématiques et physique. In *Les mathématiques dans le monde contemporain.* Académie des sciences. Rapport rst n°20. p. 12. Edit. TEC & DOC. Paris

Barbarin, P. (1928) : La géométrie non euclidienne. Jacques Gabay. (Édit). 3e édition. Paris

Beaufils, D. (1991) : *Ordinateur outil de laboratoire dans l'enseignement des sciences physiques, propositions pour la construction d'activités, première analyse des difficultés et des compétences requises chez les élèves de lycée.* Thèse : Université Paris 7.

Beaufils, D. (1993) : L'ordinateur outil d'investigation scientifique au lycée : propositions et implications didactiques, *Didaskalia*, n°1, p. 123-130

Beaufils, D. & Richoux, H. (1996) : Intégration de l'ordinateur outil d'investigation scientifique dans l'enseignement des sciences physiques au lycée. In *Documents et travaux de recherche en éducation, n°20.* p. 130.Paris. INRP.

Belhoste, B. (1985) : Cauchy (1789-1857). *Un mathématicien légitimiste au XIXe siècle*, Belin. Paris.

Bkouche, R. (1996) : Des limites et de la continuité dans l'enseignement. *Repères,* n° 24. p. 67-76.

Blanchard-Laville, C. (2000) : De la co-disciplinarité en sciences de l'éducation. *Revue française de pédagogie,* n°132, p. 55-56.

Blanchard, A. (1996) : *Newton : La méthode des fluxions et des suites infinies.* Réédition. Paris

Bouyrie, G. (2002), Chute dans l'air et résolution d'une équation différentielle. *Le Bup,* n° 848.

Bouyrie, G. (2003) Physique et calcul différentiel. *Le Bup*, n° 851

Bottazzini & *al.* (2000) : Les génies de la science: Poincaré philosophe et mathématicien. *Revue pour la science.* Paris

Brousseau, G. (1986) : Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7.2, Grenoble : La pensée sauvage

Bunge, M. (1983) : *épistémologie.* Edition Maloine. (coll.) Recheches interdisciplinaires. Paris.

Capponi, B. (2000) : Tableur, arithmétique et algèbre. In *Actes du colloque "Journées de formation de formateurs : l'algèbre au lycée et au collège".* p. 58-66. (Édit) IREM de Montpellier.

Castella, C. (1995) : Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherche en didactique des mathématiques.* Vol. 15. n° 1. p. 7-47.

Chau O. & Pluvinage F (1999) : Comparaison de compétences dans les approches algébriques, qualitative et informatique des équations différentielles ordinaires en première année universitaire. *Recherche en didactique des mathématiques.* Vol.19, n°2, p. 195-220

Chevallard Y. (1999) : L'analyse des pratiques des enseignants en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques.* Édition la pensée sauvage Grenoble

Chevallard, Y (1994) : *Les processus de transposition didactique et leur théorisation, La transposition didactique à l'épreuve*. Édition la pensée sauvage, Grenoble

Chevallard, Y. (1985) : La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné. *Recherche en didactique des mathématiques*. Édition la pensée sauvage Grenoble

Chevel, A. (1998) : L'histoire des disciplines scolaires. Réflexion sur un domaine de recherche. In *Histoire de l'éducation*, n°38.

Chabert J-L. & *al.* (1994) : *Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*. Coll. Regards sur la science. Belin

Clay, J. & Walker, S. (1997) : Trois suppléments sur la découverte des fonctions fuchsiennes, *Publication des Archives Henri Poincaré*. Albert Blanchard

CNRS (1989, 1990, 1993) : Rapports de conjecture
[http://www.cnrs.fr/comitenational/doc/publication.htm#rapport]

Collectif INRP-LIREST (1994). Nouveaux regards sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation en sciences, Paris : INRP.

Coste, R. & *al.* (2004) : La liaison mathématiques-physique en classe de terminale S : trois exemples d'activités autour des équations différentielles. *Bulletin de l'APMEP*, n° 452. p. 351-364.

Dahan–Dalmedico, A. & *al.* (1986) : *Une histoire des mathématiques*. Routes et dédales. Edition du Seuil

De Gennes, PG. & Bados, J. : *Les objets fragiles*, Paris, Plon (1994)

Dettori, G. & *al.* (1995): An Analysis of the Relationship between Spreadsheet and algebra, in L. Burton and B. Jaworski (Eds.) *Technologie and Mathematics Teaching- a bridge between teaching and learning*, Bromley: Chartwell-Bratt, p. 261- 274

Doucement, M. (2003) : À propos de la méthode d'Euler. *Le Bup*, n° 858.

Douady R (1992) : Des rapports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM*. 6 132- 158

Douady, R (1986) : jeux des cadres et dialectique outil-objet, *recherche en didactique de mathématiques*, vol.7.2, p. 11,

Douady, R (1984) : Rapport enseignement apprentissage : Dialectique outil-objet, jeux de cadre. *Les cahiers de didactique*, n° 3. IREM de Paris7.

Duval, R. (1995) : Quel cognitif relatif en didactique de mathématiques? In *actes de la VIII[e] Ecole d'été de didactique des mathématiques*. p. 198-214

Duval, R. (1993) : Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé. *Annale de didactique et de sciences cognitives de l'IREM de Strasbourg*. vol 5, p. 37-65

Duval R, & Egret, M.A. (1993) : Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repères – IREM* n° 12.

Emilio, S. (1987) : *Les physiciens classiques et leurs découvertes*. In De la chute des corps aux ondes hertziennes. Edition les temps des sciences. Fayard

Euler L., (1835) : *Introduction à l'analyse infinitésimale*, (trad.) J.-B. Labey. Paris

Friedelmeyer, JP. (2001) : Grandeurs et nombres : l'histoire édifiante d'un couple fécond. *Repères n°44*. p. 5-31. TOPIQUES éditions Metz, 2001

Fourez, G. (1988) : *La construction des sciences*. Coll. De Boeck Université, Le Point philosophique. Bruxelles.

Frechet, M. (1911): *Sur la notion de différentielle*. Note aux compte-rendus de l'académie des sciences, tome 152, n°13.

Gavaland, M. & Mesmin, A. (2005): Harmonisation et cohérence d'une approche bi-disciplinaire maths-physique en classe de terminale scientifique (partie 1), *Bulletin de l'Union des Physiciens*, n°879, pp. 1205-1218.

Gavaland, M. & Mesmin, A. (2006) : Harmonisation et cohérence d'une approche bi-disciplinaire maths-physique en classe de terminale scientifique (partie 2), *Bulletin de l'Union des Physiciens*, n°880, pp. 47-62.

Gilain, C. (1981) : A. L. Cauchy, *Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique, suite du Calcul Infinitésimal*, In Equations différentielles ordinaires. Johnson Reprint. Paris et New York.

Glaser JL (1998) : Mathématiques et Sciences Physiques : problèmes soulevés par le sujet du bac de physique série S 1996. *Bulletin de l'union des physiciens*

Goldstine, H (1977): A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century, Springer, New york.

Gouy, M. (2003) : Résolution par la méthode d'Euler de l'équation différentielle. *Le Bup*, n° 858.

Hayma E. & Dugour G. (2006) : Le wagonnet, côté physique et côté mathématique. *Repères*, n° 64. p. 5-25.

Haspekian, M. (2005), *Des leçons à tirer de l'intégration du tableur*. Thèse d'Université Paris 7

Hauchecome, B. (2003) : *Les mots et les maths*. Dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire mathématique. Ellipses. Paris.

Hubbard, J. & *al.* (1999) : *Equations différentielles et systèmes dynamiques*. Edit. Cassini. Paris.

Hulin, N. (1996) : Constitution de la physique moderne et nouvelle conception de l'enseignement de la discipline. In *Les sciences au lycée*. Belhoste, B. & *al.* (Édit). Vuibert p 55-63.INRP.

Hulin N. (1996) : L'enseignement de la physique : d'une réforme à l'autre, permanences et décalages. In *Les sciences au lycée*. Belhoste, B. & *al.* (Édit). Vuibert p 107-116. INRP.

Johsua, S. (1985) : *Contribution à la détermination du contraint et du possible dans l'enseignement de la physique.* (Essai de didactique expérimentale). Thèse d'Etat. Université Aix-Marseilles 2.

Johsua, S. & Dupin, JJ. (1993) : *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques.* PUF

Johsua, S. & Dupin, JJ. (1987) : La gestion des contradictions dans des processus de modélisation en physique, en situation de classe. *Colloque GECO.* CNRS

Kahane J.-P. (1996) : les mathématiques, hier et demain. In *Les sciences au lycée.* Belhoste, B. & *al.* (Édit). Vuibert p 89-94. INRP.

Kuntz, G.(2002) : Equations différentielles : la perte de sens n'est pas sans risque. *Repère* n°46 pp.107-114.

Kuntzmann, J. (1976) : *Évolution et étude critique des enseignements de mathématiques.* CEDIC. Paris.

Lagrange, J.- L. (1797) : *théorie des fonctions analytiques contenant le principe du calcul différentiel.* Paris.

Laroche, F (2003), Promenades mathématiques. *Histoire, fondement, applications.* Ellipse Paris.

Le Lionnais, F. & *al.* (2007) : *Dictionnaire des mathématiques.* 7e édition. Quadrique. PUF. Paris

Legrand, M. (1988) : Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 9, n°3, pp. 365-406

Lehning, H. (2003) : Deux disciplines, une histoire. *Revue Tangente* n°90

Leipzig. (1686) : *La géométrie profonde et l'analyse des indivisibles et des infinis.* In Les acta eruditorum.

Lerouge, A. (1992) : *Représentation cartésienne, rationalité mathématique et rationalité du quotidien chez des élèves de collège.* Thèse de doctorat. Montpellier : université de Montpellier II

Lerouge, A. (2000) : la notion de cadre de rationalité à propos de la droite au collège, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 20 n°2, pp. 171- 208

Les nouveaux programmes de première et Terminale de l'enseignement du second degré. (1967). *Bulletin de l'APMEP* n° 252 bis. Bulletin spécial.

Lijnse, p. (1997) : Le développement de programmes dans l'enseignement de la physique. In *Des Résultats de Recherche en Didactique de la Physique à la Formation des Maîtres* Tiberghien et *al.* (Édit.). ICPE. Traduction française.

Malafosse, D.(1999) : *Contribution à la modélisation et à l'analyse des processus de conceptualisation en inter-didactique des mathématiques et de la physique : exemple de la loi d'Ohm.* Thèse de doctorat. Montpellier : université de Montpellier II

Malafousse, D. & *al.* (2001) : Etude en interdisciplinarité des mathématiques et de la physique de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège: changement de cadre de rationalité. *Revue Didaskalia* n°18, pages 61 à 98

Malafosse, D. & Lerouge, A. (2001) : D'une démarche interdidactique mathématiques/physique à un projet de formation initiale des professeurs de collèges et de lycées. *Aster*, n°32

Malonga, F. (2008) : L'enseignement des équations différentielles à l'interface mathématiques - physique dans l'enseignement secondaire français. *In* N. Bednarz, C. Mary (Eds). *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. Actes du colloque international espace mathématique francophone.* Sherbrooke (Canada) : Éditions du CRP.

Malonga F., & *al.* (2008) : Les équations différentielles du premier ordre en physique en terminale S : le lien avec les mathématiques en question. *Le Bup*, n° 904.

Malonga, F. & *al.* (2008) : La méthode dans l'enseignement de mathématiques et de physique en terminale S. *Le Bup*, n°907. Vol 102

Malonga, F (2002) : *Etude de continuité et rupture des équations différentielles dans l'enseignement secondaire*. Mémoire de DEA

Mizony, M. (2006) : Relations entre physique et mathématique : un problème épistémologique. Sous-titre : L'héritage de Poincaré : de l'éther à la modélisation. *Repères,* n° 64. p. 89-111.

Moatti, A. & *al.* (2006) : *Les indispensables mathématiques et physiques pour tous.* Coll: Sciences. Odile Jacob. Paris.

Moreno, J. (2006) : *Articulation des registres graphique et symbolique pour l\'étude des équations différentielles avec Cabri Géomètre. Analyse des difficultés des étudiants et du rôle du logiciel.* Thèse de doctorat. Université Grenoble 1

Morin, E (1990) : Sur l'interdisciplinarité. In *Carrefour des sciences. Actes du Colloque du Comité National de la Recherche Scientifique*. Éditions du CNRS, 1990.

Munier, V. & Merle, H (2007) : Une approche interdisciplinaire mathématique-physique. Du concept d'angle à l'école élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 27. n°. 3. p. 349-388.

Noirefalise, R. (2004) : Modélisation et équation différentielle en TS : Utilisation d'un modèle praxéologique pour poser des questions didactiques. *Petit x* 66, p. 6-17.

Ost, F. (1997) : Paradigme théorique et anticipation éthique : L'expérience des facultés universitaires Saint-Louis (Bruxelles). *Colloque FIUC.* Santiago Chili

Parzsys B. (2005) : Commentaires de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. In *Les mathématiques dans le monde scientifique contemporain* (édit. TEC&DOC). Académie des sciences. Rapport sur la science et la technologie n°20. p. 299. Paris

Patras, F. (2001) : *La pensée mathématique contemporaine.* Coll. Science, histoire et société. PUF. Vendôme.

Petite encyclopédie des mathématiques, p. 36. Edition K. Pagoulatos, 2ème édition. Paris – Londre – Athènes, 1986

Picard, H (1892) : *Les Méthodes nouvelles de la Mécaniques céleste.* Tome .1, Gauthier-Villars, Paris 1892

Praslon, F. (2000) : *Continuité et ruptures dans la transition terminale S / DEUG Science en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement.* Thèse de didactique des mathématiques. (Édit.) IREM Université Paris 7 Denis Diderot.

Quelen, JP. (2006) : Deux situations traitées de concert en mathématiques et en physique. *Repères.* Num. 65. p. 33-42.

Rajonson, L (1988) : *L'analyser écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas.* Thèse de troisième cycle, Université d'Aix-Marseille II

Raynaud, R. (1960) : A propos des équations. *Bulletin APMEP*, n° 213.

Renard, JP et *al.* (1999) : Interdisciplinarité, Polyvalence et formation professionnelle en IUFM. CNDP réseau. Charleville-Mézières.

Renaut A (2006) : *La philosophie.* Edit. Odile Jacob. Paris

Revuz, A. (1996) : La prise de conscience bourbakiste, *1930 – 1960.* In *Les sciences au lycée.* Belhoste, B. & *al.* (Édit). Vuibert p 55-63. INRP.

Richard, J.-F (1990) : la notion de représentation et les formes de représentation In. Richard J.-F., bonnet C. et Ghiglione C. (éds), *le traitement de l'informatique symbolique.* pp.36-40. Paris. Dunod.

Robert, A. & Tenaud, I. (1989) : Travail en petits groupes dans l'enseignement post-obligatoire. *Bulletin de l'APMEP*, n°. 370. p. 479-485.

Rodriguez, R. (2007) : *Les équations différentielles comme outils de modélisation mathématique en classe de physique et de mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en terminale S.* Thèse : Université Joseph Fourrier.

Rogalski, M (2006) : Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs. Un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique. *Repères.* Num. 64. p. 27-48.

Rogalski, M et *al.* (2001) : *Carrefours entre analyse, algèbre et géométrie.* Ellipse. Les dossiers du CAPES et de l'agrégation. Paris

Rojano, T & Sutherland, R. (2001): *Algebraic reasoning with spreadsheets.* International Seminar, Cambridge.

Rumelhard, G. & Desbeaux-salviat, B. (2000) : Rencontre entre les disciplines. *Aster*, n°30 ; p. 212.

Saglam, A. (2004) : *Les Équations Différentielles en Mathématiques et en Physique.* Thèse : Université Joseph Fourier.

Tall, D. (1991): The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3–24). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Trigeassou, J.-Cl. (1988): *Recherche de modèles expérimentaux assistée par ordinateur*, Paris: Tec & Doc, Lavoisier

Trigeassou, JC. (1991) : Analyse de données, méthodes numériques et sciences physiques. *Le Bup*, n° 731.

Tournès, D. (1998) : L'origine des méthodes multipas pour l'intégration numérique des équations différentielles ordinaires. *Revue d'histoire des mathématiques*, Tome 4, pp. 5-72

Tournès, D. (1996) : *L'intégration approchée des équations différentielles ordinaires (1671-1914).* Thèse de doctorat de l'université Paris7.

Tsoumpélis, L. (2005) : Aspects théoriques et méthodologiques de la didactique des sciences physiques. Explication et causalité dans les situations didactiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 25. Num. 2. p. 187-246.

Vergnaud, G. (1990) : la théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 10 n°2/3 pp.113- 170.

Viennot, L. (1996) : *Raisonner en physique. La part du sens commun.* Méthode en sciences humaines. De boeck.

Winther, J. et *al.* (2003) Les équations différentielles en terminale scientifique. *Le Bup*, n° 855.

ANNEXES

Annexe 1 : Tableau synoptique sur l'évolution des équations différentielles en mathématiques

Période	Type d'équations différentielles.	Habitat	Pensée dominante	Lien avec la physique
1960- 1970 *Introduction des maths modernes*	$y' = ay$ $\quad y' = p(x)$ $y'' = p(x)$ $\quad y'' + \omega^2 y = 0$	Equations et inéquations	Structuralisme	Quasi- absent
1970 – 1980 *Reforme des maths modernes*	$y' = ay$ $\quad y' = p(x)$ $y'' = p(x)$ $\quad y'' + \omega^2 y = 0$ $y'' + ay' + by = f(x)$	- Espace vectoriel - Calcul différentiel et intégral	Structuralisme	- Mécanique - Electricité
1980-1990 *Contre-réforme des maths modernes*	Idem	- Calcul différentiel et intégral	(socio) constructivisme	- Mécanique - Electricité
1990- 1998 **1998- 2002**	Idem $y' = ay$ $y'' - \omega^2 y = 0$ $y'' + \omega^2 y = 0$	- Calcul différentiel et intégral - fonctions trigonométriques	(socio) constructivisme	Modélisation - électricité -mécanique
Depuis 2002	$y' = ay + b$	-Fonction exponentielle -Suite numérique	(socio) constructivisme	Modélisation - radio –activité -électricité - mécanique

Annexe 2 : Tableau synoptique sur l'évolution des équations différentielles en physique

		Équations différentielles et leurs solutions
1966	Force masse → 2e loi de Newton ← accélération ↕ ↕ ↕ moment → loi pour la rotation ← accélération angulaire ↓ oscillations circulaires ↓ ED 2e ordre ↓ solution trigonométrique	$\alpha'' = -\omega^2\alpha$ sol : $\alpha = \alpha_m \sin(\omega t + \varphi)$
1979	Force masse → 2e loi de Newton ← accélération ↓ oscillations linéaires ou de torsion ↓ ED 2e ordre ↓ solution trigonométrique	$m\ddot{x} + kx = 0$ sol : $x = X_m \cos(\omega_0 t - \varphi)$ $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0$ (pas de résolution) $J\ddot{\theta} = \sum M_\Delta$ $L\ddot{q} + \frac{q}{c} = 0$ sol : $q = Q_m \cos(\omega_0 t - \varphi)$
1983	idem	

<table>
<tr>
<td>1989</td>
<td>Force
masse $\longrightarrow$ 2e loi de Newton $\longleftarrow$ accélération
$\downarrow$
oscillations linéaires
$\downarrow$
ED 2e ordre
$\downarrow$
solution trigonométrique</td>
<td>$m\ddot{x} + kx = 0$
sol : $x = X_m \cos(\omega_0 t - \varphi)$

$L\ddot{q} + \frac{q}{c} = 0$
sol : $q = Q_m \cos(\omega_0 t - \varphi)$</td>
</tr>
<tr>
<td>1995</td>
<td>Force
masse $\longrightarrow$ 2e loi de Newton $\longleftarrow$ accélérati
$\downarrow$
oscillations linéaires
$\downarrow$
ED 2e ordre
$\downarrow$
solution trigonométrique

Bobine $\searrow$ loi des circuits $\swarrow$ Condensateur
$\downarrow$
ED 2e ordre
$\downarrow$
solution trigonométrique</td>
<td>$x'' - \omega_0^2 x = 0$
sol : $x = X_m \cos(\omega_0 t - \varphi)$
(mais ici de façon générale : x est une grandeur "quelconque").

$x'' + Ax' + \omega^2 x = 0$ (sans solution)</td>
</tr>
</table>

2002	Décroissance radioactive ; forme différentielle ; exponentielle	$\Delta N = -\lambda N \Delta t$; $N = N_0 e^{-\lambda t}$.
	loi des circuits ↓ résistance → ED 1^e ordre ← condensateur ↓ solution exponentielle	$\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{\tau}u_C=\frac{E}{\tau}$ sol : $u_C(t)=Ae^{-mt}+B$ $\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{\tau}=0$ sol : $u_C(t)=Ae^{-mt}+B$
	loi des circuits ↓ résistance → ED 1^e ordre ← bobine ↓ solution exponentielle	$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+u_C=0$ sol : $u_C(t)=A\cos(2\pi\frac{t}{T_0}+\phi)$
	2^e loi de Newton ↓ frottement -kv → ED 1^e ordre en v ← pesanteur ↓ solution exponentielle	$m\frac{dv}{dt}=(m-m_{fluide})g-f(v)$ sol : $v=C_1e^{-\alpha t}+C_2$
	2^e loi de Newton ↓ Pesanteur → ED 2^e ordre ↓ solution polynomiale	$d^2z/dt^2 = dv_z/dt = -g$ $v_z(t) = -gt + C_1 = dz/dt$ $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$

	force de rappel ↘ 2^{e} loi de Newton ↓ ED2^{e} ordre en x ↓ solution trigonométrique	$\boldsymbol{d^2x/dt^2 + (k/m)\,x = 0}$ $x = x_m\cos(2\pi t/T_0 + \varphi_0)$

Remarque : pour le programme 2002, les formules sont recopiées d'ouvrages et non du texte du B.O. hormis la dernière relation.

Annexe 3 : Exercices prototypiques

L'idée est ici de faire deux versions d'un même exercice : l'une pour un ouvrage de physique, l'autre pour un ouvrage de mathématiques. Il s'agit donc d'exercices que nous qualifierons de "contraints" (ou sous contrainte) : la contrainte étant ici la proximité didactique des énoncés (voir paragraphe ci-dessous).

L'objectif est de travailler la continuité (ou du moins la correspondance) didactique : essai d'isomorphisme des exercices au niveau des concepts associés à l'équation différentielle du première ordre (nature, forme de la solution, ensemble des solutions, spécification d'une solution par une "contrainte"). Mais l'objectif est aussi de mettre en regard les compétences (savoirs et savoir-faire) mises en jeu dans le respect des programmes et objectifs de chaque discipline.

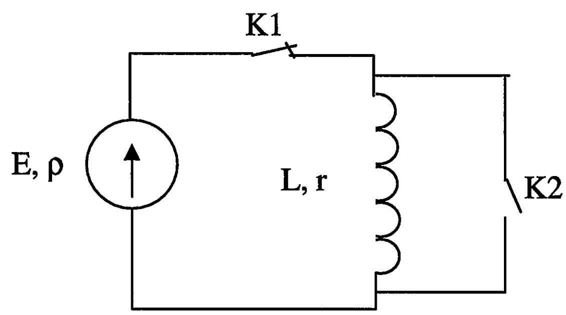
Une "analyse conceptuelle" est également faite qui permet de mettre à jour les sous-entendus, les connaissances implicites, les éventuelles difficultés et les possibles variations dans le cas d'un exercice "non contraint".

1. Physique

Énoncé

Une bobine d'inductance L et de résistance interne r est branchée sur un générateur de f.e.m. E de résistance interne ρ.

L'interrupteur K1 est fermé depuis longtemps de telle sorte que le circuit est en "régime permanent".



1) L'intensité *I*o du courant qui circule dans la bobine en régime permanent est égale à *E*/*R*, où *R* représente la résistance totale du circuit. Justifiez cette valeur.

2) On court-circuite alors les bornes de la bobine (interrupteur K2). Représenter le schéma équivalent de ce circuit.

3) Exprimer par une équation différentielle le fait que la tension aux bornes de la bobine est alors nulle. Montrer alors que l'intensité suit une loi exponentielle de la forme $i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$. Exprimer τ en fonction des paramètres du circuit. Vérifier l'homogénéité de la relation par une équation aux dimensions.

4) On considère l'origine des temps au moment où l'on court-circuite la bobine. Montrer alors que l'intensité s'écrit $i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$.

5) Représenter graphiquement l'allure de l'évolution de l'intensité à partir de la date t = 0. Vers quelle valeur tend l'intensité ? Quelle explication physique peut-on donner ? Calculer le rapport $i(t) / Io$ pour $t = \tau$. Pourquoi dit-on alors que c'est une caractéristique du circuit ?

Analyse "conceptuelle" de l'exercice

Texte	*Commentaires*
Une bobine d'inductance L et de résistance interne r est branchée sur un générateur de f.e.m. E de résistance interne ρ. L'interrupteur K1 est fermé depuis longtemps de telle sorte que le circuit est en "régime permanent".	La notion de régime permanent n'est pas nécessairement évidente pour les élèves. On pourrait rajouter une question du type "qu'est-ce que le régime permanent ? Quelle est l'allure de l'évolution de l'intensité avant l'établissement de ce régime ?
1) L'intensité *I*o du courant qui circule dans la bobine en régime permanent est égale à *E*/*R*, où *R* représente la résistance totale du circuit. Justifiez cette valeur.	C'est la question la plus simple permettant de concrétiser la condition qui sera nécessaire pour la suite de l'exercice. On donne ici la réponse et on ne demande que de la justifier.
2) On court-circuite alors les bornes de la bobine (interrupteur K2). Représenter le schéma équivalent de ce circuit.	C'est le schéma équivalent qui permettra l'établissement correct de l'équation différentielle. En particulier, il y a ici la représentation possible de la bobine par l'association série L + r (bobine idéale + résistance). En fait, il y a une grosse difficulté car le reste du circuit est aussi court-circuité... Pour s'en sortir il faut faire un autre montage avec une diode...
3) Exprimer par une équation différentielle le fait que la tension aux bornes de la bobine est alors nulle.	On donne ici l'indication sur la "tension nulle", c'est à dire à la fois le fait qu'il convient d'écrire une relation sur la tension et le fait qu'étant donné la nature d'un court-circuit, on considère que la tension est nulle. Tout ceci pourrait faire l'objet d'un questionnement.
Montrer alors que l'intensité suit une loi exponentielle de la forme	On donne la forme de la solution, l'objectif de l'exercice n'étant pas de solliciter les connaissances mathématiques sur les ED.

$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$. Exprimer τ en fonction des paramètres du circuit. Vérifier l'homogénéité de la relation par une équation aux dimensions.	La question de l'homogénéité est importante en physique. C'est ce qui permet de dire que c'est un paramètre du genre "temps" (constante de temps). Ceci est important aussi à relever car la notion d'unité est l'une des grosses différences avec les mathématiques.
4) On considère l'origine des temps au moment où l'on court-circuite la bobine. Montrer alors que l'intensité s'écrit $i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$ où R représente la résistance totale du circuit.	Implicitement, la séparation des questions 3 et 4 vise la distinction entre l'étape d'écriture de la solution générale (ensemble de fonction) qui ne dépend que des paramètres du système et l'étape de spécification de la "constante d'intégration" (dont d'une solution particulière) fixée par une condition (en physique, c'est souvent la condition dite "initiale, comprendre "à t = 0").
5) Représenter graphiquement l'allure de l'évolution de l'intensité à partir de la date t = 0. Vers quelle valeur tend l'intensité ? Quelle explication physique peut-on donner ? Calculer le rapport $i(t) / I_0$ pour $t = \tau$. Pourquoi dit-on alors que c'est une caractéristique du circuit ?	L'évolution est donc une décroissance vers 0. En termes physique, c'est la dissipation de l'énergie par effet Joule dans la résistance propre de la bobine. L'idée du rapport est implicitement de montrer qu'il s'agit bien d'un pourcentage qui est indépendant de A donc des conditions initiales. C'est donc bien une caractéristique du circuit.
6) Quelle est l'influence de L et r sur la valeur de τ ? Donner une interprétation physique de cette dépendance.	Une 6[e] question est quasi incontournable dans un exercice de physique où il s'agit toujours de faire un retour aux propriétés physiques observables.

Analyse en termes de savoirs et savoir-faire

Texte	*Savoirs et savoir-faire*
Une bobine d'inductance L et de résistance interne r est branchée sur un générateur de f.e.m. E de résistance interne ρ. L'interrupteur K1 est fermé depuis longtemps de telle sorte que le circuit est en "régime permanent".	Vocabulaire : bobine, inductance, résistance, générateur f.e.m. Savoir lire un schéma codifié.
1) L'intensité *I*o du courant qui circule dans la bobine en régime permanent est égale à *E*/*R*, où *R* représente la résistance totale du circuit. Justifiez cette valeur.	savoir ce qu'est le régime permanent et que dans ce cas la bobine se comporte comme une simple résistance. Appliquer la loi d'Ohm avec deux résistances en série.
2) On court-circuite alors les bornes de la bobine (interrupteur K2). Représenter le schéma équivalent de ce circuit.	Savoir faire le schéma équivalent de cette seule partie du circuit (on s'abstrait du reste du circuit), en particulier, la représentation possible de la bobine par l'association série L + r (bobine idéale + résistance). Connaître la "loi d'Ohm" pour la bobine ($U_L = L\dfrac{di}{dt} + ri$). Connaître l'expression "équation différentielle".
3) Exprimer par une équation différentielle le fait que la tension aux bornes de la bobine est alors nulle. Montrer alors que l'intensité suit une loi exponentielle de la forme $i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$. Exprimer τ en fonction des paramètres du circuit. Vérifier l'homogénéité de la relation par une	Connaître la fonction exponentielle, savoir la dériver. Savoir identifier des paramètres. Connaître et savoir établir les dimensions de grandeurs physiques. connaître $e^0 = 1$.

équation aux dimensions. 4) On considère l'origine des temps au moment où l'on court-circuite la bobine. Montrer alors que l'intensité s'écrit $i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ où R représente la résistance totale du circuit. 5) Représenter graphiquement l'allure de l'évolution de l'intensité à partir de la date t = 0. Vers quelle valeur tend l'intensité ? Quelle explication physique peut-on donner ? Calculer le rapport $i(t)$ / Io pour t = τ . Pourquoi dit-on alors que c'est une caractéristique du circuit ?	Connaître le graphe de la fonction exp(-kx) et sa limite égale à 0. Connaître la dissipation de l'énergie par effet Joule. Calculer un rapport. Savoir ce que signifie e^{-1}. Savoir qu'une caractéristique d'un système ne dépend pas des conditions initiales.

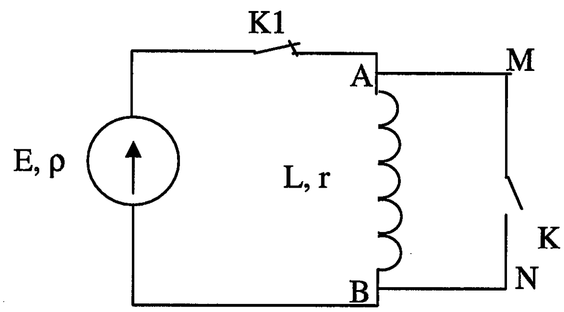
2. Mathématiques

Énoncé

Une bobine d'inductance L et de résistance interne r est branchée sur un générateur de f.e.m. E de résistance interne ρ.

L'intensité qui circule alors dans la bobine a une valeur notée Io.

On court-circuite alors les bornes de la bobine (interrupteur K).



Les lois de l'électrocinétique permettent de montrer que l'intensité i du courant qui circule alors dans le circuit AMNB est telle que : $ri + L\frac{di}{dt} = 0$ (E)

1) Quelle est alors la loi d'évolution $i(t)$ de l'intensité au cours du temps ? Écrire l'expression de $i(t)$ en utilisant le paramètre $\tau = \frac{L}{r}$ appelée constante de temps.

2) Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E) lorsque $i(0) = Io$ (condition initiale).

3) Quelle est la valeur limite de l'intensité lorsque $t \to \infty$? Donner une interprétation graphique du résultat.

4) Représenter graphiquement l'allure de l'évolution de l'intensité à partir de la date t = 0.

5) Tracer la tangente l'origine. Écrire son équation. À quelle valeur de t coupe-t-elle l'axe du temps ?

Analyse en termes de savoirs et savoir-faire

Texte	*Savoirs et savoir-faire*
Une bobine d'inductance L et de résistance interne r est branchée sur un générateur de f.e.m. E de résistance interne ρ. L'intensité qui circule alors dans la bobine a une valeur notée Io. On court-circuite alors les bornes de la bobine (interrupteur K).	Vocabulaire : bobine, générateur, etc.

Les lois de l'électrocinétique permettent de montrer que l'intensité i du courant qui circule alors dans le circuit AMNB est telle que : $ri + L\frac{di}{dt} = 0$	Reconnaître une équation différentielle (ED) du premier ordre à coefficient constant. Savoir réécrire sous la forme y' = ay
1) Quelle est alors la loi d'évolution $i(t)$ de l'intensité au cours du temps ? Écrire l'expression de $i(t)$ en utilisant le paramètre $\tau = \frac{L}{r}$ appelée constante de temps.	Savoir que les solutions de ce type d'ED sont de la forme y= ke^{ax} (avec k une constante réelle).
2) Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E) lorsque $i(0)$ = Io (condition initiale).	Savoir $e^0 = 1$
3) Quelle est la limite de l'intensité lorsque t → ∞ ? Donner une interprétation graphique.	Savoir calculer la limite de la fonction exponentielle avec exposant négatif
4) Représenter graphiquement l'allure de l'évolution de l'intensité à partir de la date t = 0.	Savoir donner le comportement asymptotique d'une courbe à partir la valeur de la limite de la fonction. Connaître l'allure de la fonction exp décroissante
5) Tracer la tangente l'origine. Écrire son équation. À quelle valeur de t coupe-t-elle l'axe du temps ?	Savoir trouver l'équation de la tangente en un point en fonction de la valeur de la dérivée. Savoir dériver une fonction exponentielle. Savoir écrire l'équation d'une intersection avec l'axe des abscisses Savoir résoudre une équation linéaire du premier ordre.

II. Squelette exercices analogues

Physique	Mathématiques
Présentation du système : paramètres du système, grandeur qui évolue. Précision sur les notations et grandeurs (éventuellement schéma à l'appui).	Présentation du système : paramètres du système, grandeur qui évolue. Précision sur les notations et grandeurs (éventuellement schéma à l'appui).
Indication concernant la situation ou l'événement correspondant à $t = 0$ Éventuellement justification physique. Établissement de l'équation différentielle par application des lois de la physique (électrocinétique avec loi des bobines et loi des condensateurs ; mécanique avec la deuxième loi de Newton ; physique moderne avec la loi de l'activité en radioactivité).	Donnée d'une équation différentielle censée résulter des lois de la physique. Indication concernant la situation ou l'événement correspondant à $t = 0$
Vérifier que la grandeur qui varie au cours du temps suit une loi de type $g(t) = Ae^{kx}$ $(+ B)$; identification du paramètre k (éventuellement vérification de l'homogénéité dimensionnelle) et du paramètre B	Rechercher la loi d'évolution de la grandeur. (écrire sous la forme $y' = ay + b$ et en déduire $y = Ke^{ax} - b/a$; remplacer a et b par les expressions en fonction des paramètres)
Tenir compte de la condition initiale pour déterminer la constante A. Étudier la limite quand $t \to \infty$ Tracer la courbe représentative Calculer le rapport $g(t)$ / go pour $t = \tau$.	Tenir compte de la condition initiale pour déterminer la constante K. Étudier la limite quand $t \to \infty$ Tracer la courbe représentative
	Tracer la tangente l'origine. Écrire son équation.

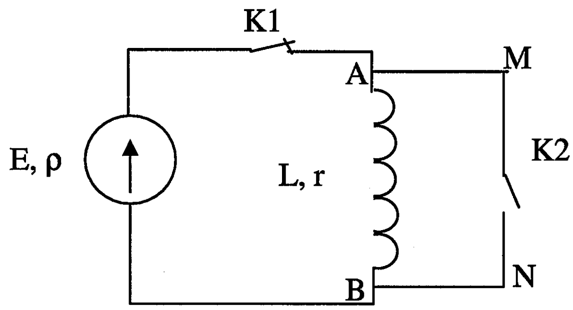
Déterminer l'expression de la fonction dérivée $g'(t)$. Commenter l'évolution.	À quelle valeur de t coupe-t-elle l'axe du temps ?

III. Exercice synthétique mathématiques-physique

L'idée est ici de faire une version "synthèse" des points de vue mathématiques et physique. La modélisation comporte alors des savoirs et savoir-faire des 2 disciplines qui sont sollicités alternativement.

Énoncé

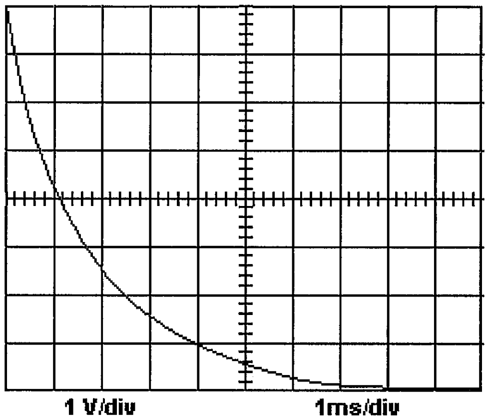
Une bobine d'inductance L et de résistance interne r est branchée sur un générateur de f.e.m. E de résistance interne ρ.
L'interrupteur K1 est fermé depuis longtemps de telle sorte que le circuit est en "régime permanent".



1) L'intensité *I*o du courant qui circule dans la bobine en régime permanent est égale à *E*/*R*, où *R* représente la résistance totale du circuit. Justifiez cette valeur.
2) On court-circuite alors les bornes de la bobine (interrupteur K2). Représenter le schéma équivalent de ce circuit.
3) Montrer que le fait que la tension aux bornes de la bobine soit alors nulle conduit à une équation différentielle de la forme $\frac{di}{dt}+\frac{1}{\tau}i=0$. Exprimer τ en fonction des paramètres du circuit. Vérifier l'homogénéité de la relation par une équation aux dimensions.
4) Quelle est l'ensemble des solutions de cette équation différentielle ?
4) On considère l'origine des temps au moment où l'on court-circuite la bobine. En quoi ceci permet-il de spécifier une solution particulière ? Quelle est alors la loi d'évolution *i*(*t*) de l'intensité au cours du temps ? On écrira le résultat en fonction de Io et τ.
5) Quelle est la limite de l'intensité lorsque t → ∞ ? Cette limite dépend-elle des paramètres ? Quelle interprétation physique peut-on donner de ce résultat mathématique ? Représenter graphiquement l'allure de l'évolution de l'intensité à partir de la date t = 0.
5) Calculer le rapport *i*(*t*) / *I*o pour t = τ . Pourquoi dit-on alors que c'est une caractéristique du circuit ?

6) Ce rapport étant voisin de 5/8, expliquer comment, sur un écran d'oscilloscope tel que celui représenté ci-après, on peut aisément déterminer la valeur de τ.

7) Une autre méthode pour déterminer la valeur de τ repose sur le tracé de la tangente à l'origine. Compléter l'illustration ci-dessous en traçant cette tangente. Écrire son équation et démontrer qu'elle coupe l'axe du temps à la valeur $t' = \tau$.



Annexe 4 : Complément sur la méthode d'Euler

Nous avons traité dans le chapitre VI, différents points concernant la méthode d'Euler, notamment la place et le statut qui lui sont accordés. Nous revenons dans cette annexe sur un aspect de cette méthode qui ne semble pas être une préoccupation des auteurs des manuels de mathématiques. Il s'agit de la « convergence » de la méthode.

D'après l'analyse faite des manuels de mathématiques (chapitres V et VI), il apparaît clairement que le rôle de la méthode d'Euler en terminale est de justifier l'existence de la fonction exponentielle (comme on peut le constater dans l'extrait du manuel *Math'x* ci-dessous) :

Activité 2 ➥ Équation $y' = y$ avec $y(0) = 1$

On cherche une fonction f solution de l'équation différentielle $y' = y$, c'est-à-dire dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$, et telle que $f(0) = 1$.
On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On prendra 1 cm pour unité graphique et on laissera un espace de 12 cm au-dessus de l'axe des abscisses.

OBJECTIF
Construire pas à pas une solution approchée de l'équation $y' = y$ (méthode d'Euler).

A ▪ Avec un pas de 1

1. a. Préciser le point A_0 de C d'abscisse 0 et le coefficient directeur de la tangente à C en ce point.
b. Tracer cette tangente sur $[0 ; 1]$.
On obtient un segment $[A_0A_1]$ qui approche la courbe C sur $[0 ; 1]$.
c. Quelle est l'ordonnée de A_1 ?
On la prend pour valeur approchée de $f(1)$ qui reste inconnu.
d. Quel est le coefficient directeur de la tangente à C au point de C d'abscisse 1 ?
Par quelle courbe peut-on approcher C sur $[1 ; 2]$?
Quelle valeur approchée de $f(2)$ obtient-on ainsi ?

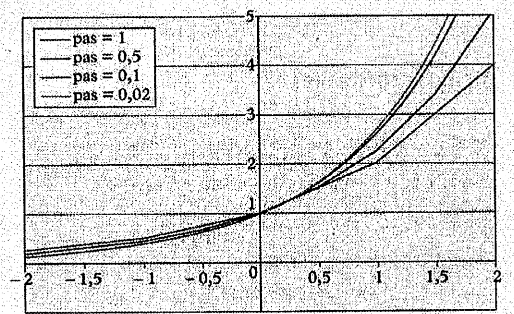
2. Plus généralement
a. Rappeler l'approximation affine de f au voisinage d'un réel a.
b. En déduire que, pour tout réel a, $f(a+1) \approx 2f(a)$.
c. Connaissant $f(0) = 1$, quelles valeurs approchées de $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ obtient-on ? et pour $f(-1)$, $f(-2)$, $f(-3)$?
d. Achever le tracé de la courbe approchée pour C sur $[-3 ; 3]$.

B ▪ Avec un pas de 0,5

a. Montrer que $f(a + 0{,}5) \approx 1{,}5 f(a)$.
b. Quelles valeurs approchées de $f(0{,}5)$, $f(1)$, $f(1{,}5)$, ..., $f(3)$ obtient-on ? et pour $f(-0{,}5)$, $f(-1)$, ..., $f(-3)$?
c. Tracer, sur le même graphique que précédemment, la courbe approchée que l'on obtient ainsi pour C sur $[-3 ; 3]$.

C ▪ Avec un tableur

En réduisant le pas δ de la subdivision, on obtient les quatre courbes ci-dessous. Que peut-on observer ?



chapitre 4 Fonction exponentielle ➥ 115

Différents pas de calcul sont utilisés pour trouver des approximations affines par morceaux sur [-2 ; 2] de la solution de l'équation différentielle y' = y vérifiant la condition y(0) = 1, sous l'hypothèse qu'elle existe. Les courbes représentatives de ces fonctions approchées sont construites (dans la partie C) dans le but de justifier l'existence de la solution On peut bien le remarquer dans la page suivante du manuel qui présente un résumé de cours.

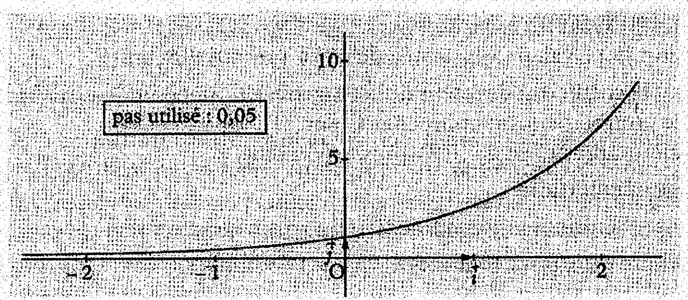
1. Fonction exponentielle

A ■ L'équation différentielle (E) : $y' = y$ avec $y(0) = 1$

On cherche les solutions de (E), c'est-à-dire les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

La méthode d'Euler, dont la démarche « pas à pas » permet de construire la courbe d'une solution approchée de l'équation (E) sur un intervalle de $\mathbb{R}$, amène à conjecturer l'existence d'une telle solution.



Le deuxième paragraphe de cet encadré se rapporte à l'activité 2. Il y est indiqué que :

« La méthode d'Euler, dont ...amène à conjecturer l'existence d'une telle solution »

Cette conclusion nous semble peu convaincante puisque le constat que permet l'activité 2 est :

« plus le pas diminue, plus la courbe croît » ;

La méthode d'Euler, telle qu'elle est utilisée ici, ne permet donc pas de conjecturer l'existence de la fonction exponentielle et donc, la convergence de la méthode.

Il serait sans aucun doute plus convaincant de montrer aux élèves que, comme le préconise D. Tournès (2008), pour un pas de calcul donné on peut construire deux courbes approchées (affines par morceaux) obtenues d'une part, par la méthode d'Euler « explicite » (*i.e.* celle qui est utilisée dans les manuels) et d'autre part, par la méthode d'Euler « implicite ».

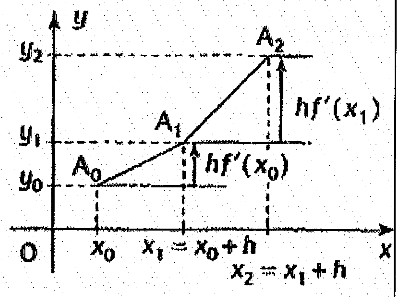
Examinons les deux versions de la méthode (explicite et implicite) à partir de l'exemple proposé dans le manuel Déclic (édition 2002).

1 Principe de la méthode

f est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que l'on connaît seulement f' et la valeur y_0 en un point x_0 de I ($f(x_0) = y_0$ est appelée condition initiale).

On construit d'abord $A_0(x_0 ; y_0)$. On choisit ensuite un réel h, $h > 0$, voisin de zéro. (h est appelé le pas). Par approximation affine locale, $f(x_0 + h)$ est voisin de $f(x_0) + hf'(x_0)$. On construit alors A_1 d'abscisse $x_1 = x_0 + h$ et d'ordonnée $y_1 = y_0 + hf'(x_0)$.

De même, à partir de A_1, on construit $A_2(x_2 = x_1 + h ; y_2 = y_1 + hf'(x_1))$ et ainsi de suite on construit les points $A_n(x_n ; y_n)$ tels que $x_{n+1} = x_n + h$ et $y_{n+1} = y_n + hf'(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



Cette méthode s'implémente sur tableur ou sur calculatrice.

D'après ce qui précède, appliquons la méthode d'Euler au cas où la fonction f est la solution de l'équation différentielle $y'=y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$. On partage l'intervalle I = [0 ; 1] en n parties égales, h est le pas de subdivision et vaut $\frac{1}{n}$.

Méthode d'Euler explicite

En considérant l'intervalle J= [k/n ; k+1/n] de I avec $k\in$[0 ; n-1], dans l'expression $y_{k+1}= y_k + hf'(x_k)$, on remplace $f'(x_k)$ par y_k (valeur approximative de f à l'extrémité « gauche » de l'intervalle J). D'où $y_{k+1}=(1+h)\, y_k$. La suite (y_k) est donc géométrique, de raison $1+h$, où h est le pas de subdivision. On peut écrire $y_{k+1}=(1+\frac{1}{n})\, y_k$ ou plus généralement (au rang n), $y_n=(1+\frac{1}{n})^n\, y_0$, c'est-à-dire $y_n=(1+\frac{1}{n})^n$ car y_0= 1.

Méthode d'Euler implicite

En procédant de la même façon, on construit la suite géométrique (z_k) en remplaçant cette fois-ci $f'(x_n)$ par z_{n+1} (valeur approximative de f à l'extrémité « droite » de l'intervalle J). On a alors $z_{k+1}= z_k + hz_{k+1}$, soit $z_{k+1}=(1-\frac{1}{n})^{-1} z_k$, ou plus généralement (au rang n), $z_n=(1-\frac{1}{n})^{-n}$.

On peut aussi parvenir au même résultat en considérant l'approximation affine locale de f en $x_n - h$. En effet, $f(x_1\text{-}h)$ est voisin de $f(x_1) - hf(x_1)$. On construit alors de proche en proche les points $A_n(x_n\,;\,y_n)$ tel que $x_{n+1} = x_n - h$ et $y_{n+1} = y_n - h\,f'(x_n)$

Remarques :

1) Au niveau du vocabulaire, la méthode d'Euler est dite « explicite » lorsqu'on utilise une valeur de *y* que l'on connait, c'est-à-dire qui a été précédemment calculée. Elle est dite « implicite » lorsqu'on utilise une valeur de *y* que l'on n'a pas encore calculée.

2) On peut montrer que *f*, solution de l'équation différentielle $y' = y$ avec la condition $y(0) = 1$ est telle que, pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $(1+\frac{1}{n})^n < f(x) < (1-\frac{1}{n})^{-n}$. Il en résulte que la « vraie » courbe, si elle existe, se situera « entre » les deux courbes approchées, et donc que, si celles-ci tendent l'une vers l'autre, on sera en bien meilleure position pour conjecturer l'existence de la solution.

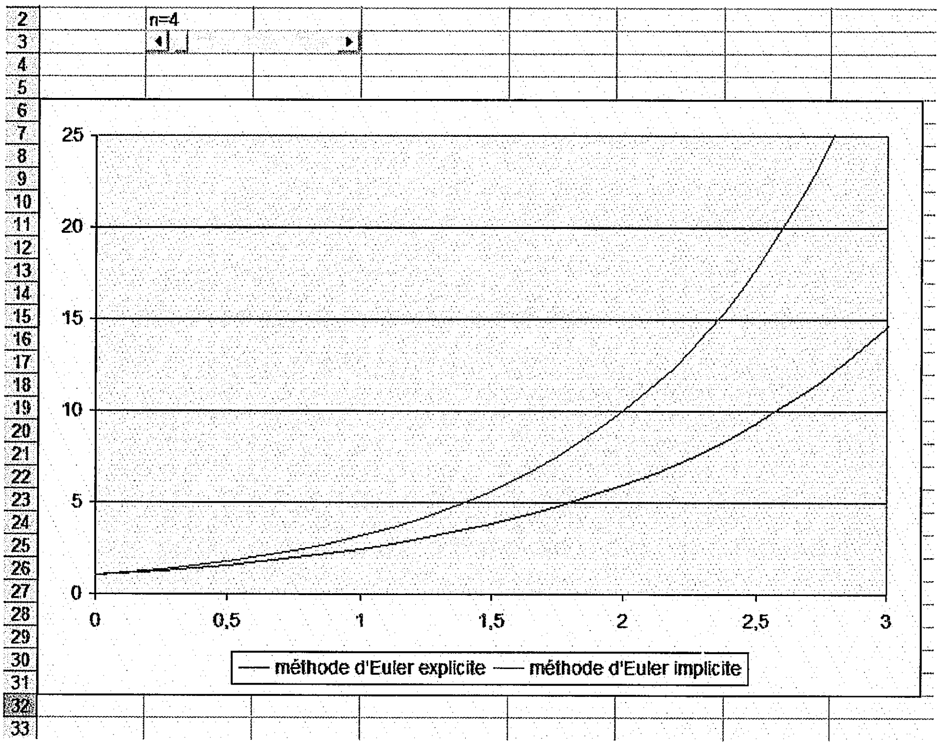
Convergence de la méthode d'Euler :

Selon D. Tournès[86], « *les deux méthodes aboutissent à des calculs simples. Et pour illustrer la convergence, on peut faire un fichier dynamique sur tableur* ».

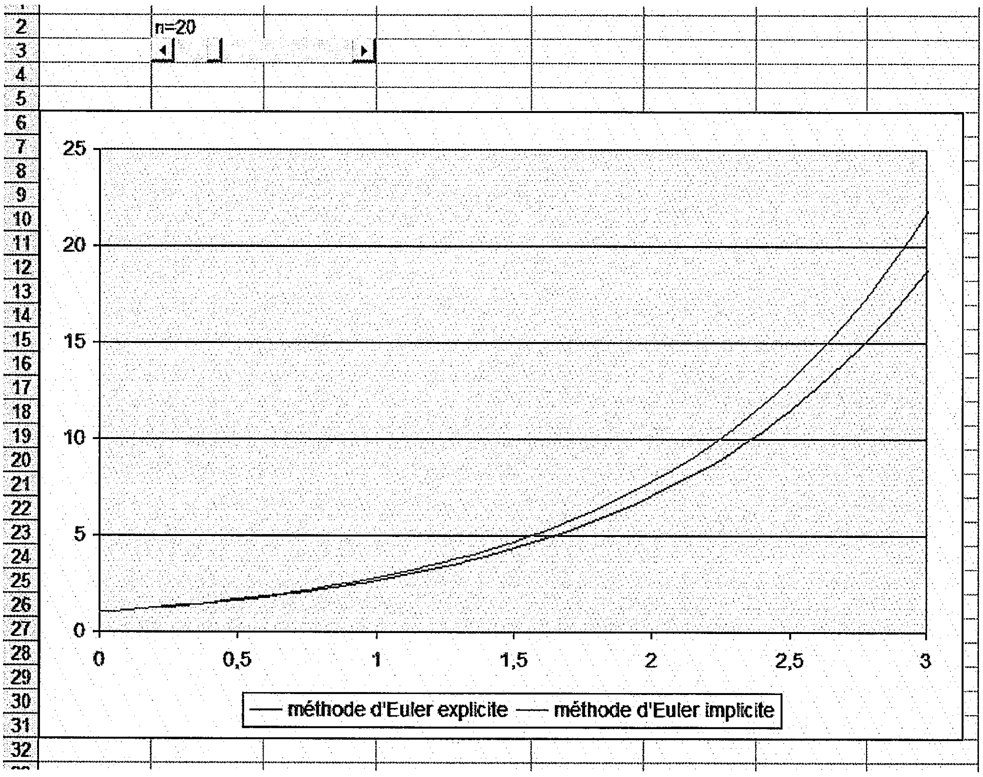
Dans les feuilles de calcul ci-dessous, on partage [0, 3] en n parties égales, n allant de 2 à 100.

Pour n= 4

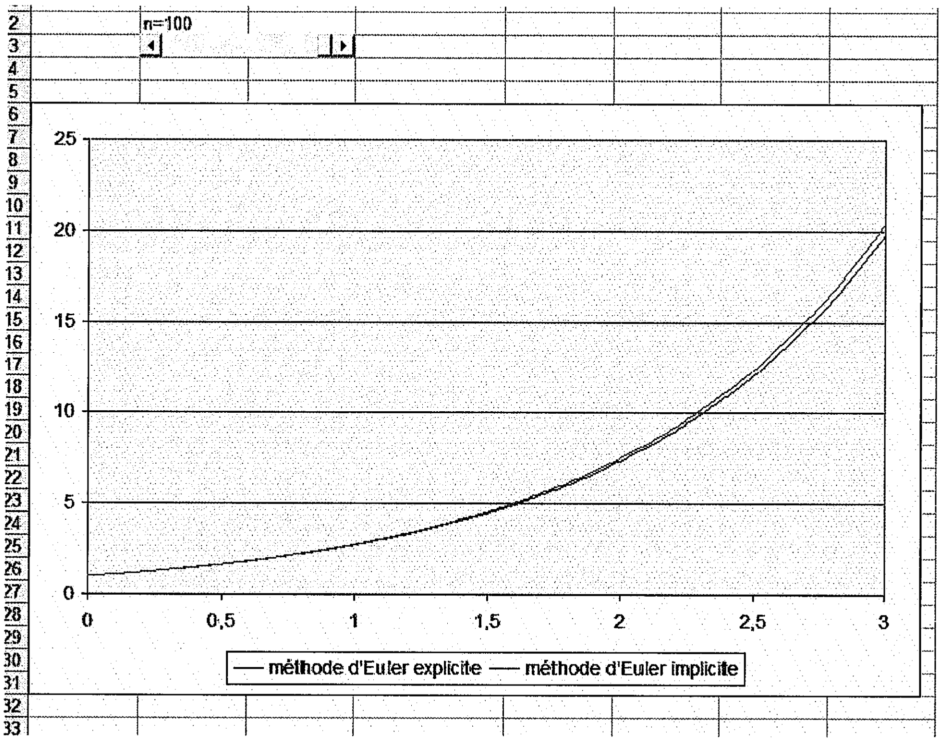
[86] http://revue.sesamath.net/spip.php


n=4
25
20
15
10
5
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
méthode d'Euler explicite
méthode d'Euler implicite

Pour n = 20


n=20
25
20
15
10
5
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
méthode d'Euler explicite
méthode d'Euler implicite

Pour n=100



Il apparait sur les trois graphiques, le rapprochement des deux courbes (explicite et implicite) avec la diminution du pas. On peut utiliser cette convergence pour se faire une idée de la courbe de l'exponentielle : lorsque le pas diminue, les courbes semblent converger vers une courbe limite, qui en vertu de la méthode, est celle de la solution cherchée. L'existence de la solution est alors « déduite » de celle de sa courbe.

Annexe 5 : Questionnaire enseignant de mathématiques

1. Indiquez la (les) période(s) au cours de(s)- laquelle (s) vous avez enseigné en terminale scientifique

1960-1970 ☐ 1970-1980 ☐ 1980-1990 ☐ 1990- 2000 ☐ 2000- 2003 ☐

2. a). À quel (s) moment(s) de l'année traitez-vous actuellement les équations différentielles ?

Sept / Oct ☐ Nov / Déc ☐ Janv/ Fev. ☐

Mars/Avr ☐ Mai / Juin ☐ Autre ☐ Préciser ....

b). Quelles sont vos raisons ?

raisons institutionnelles ☐

organisation personnelle ☐

cohérence avec d'autres enseignements ☐

Autres raisons ....

3. Combien de temps (en heures) consacrez – vous à la méthode d'Euler ?

Cours ....

TD et /ou TP.......................

Exercices ....

4. Pensez-vous qu'il est préférable d'aborder les équations différentielles en cours de mathématiques avant leur utilisation en physique, ou bien l'inverse ?

Mathématiques d'abord ☐

Sciences physiques d'abord ☐

Simultanément ☐

Indépendamment ☐

Pour quelle (s) raison(s) ?

5. Vous arrivent –ils de collaborer avec les enseignants de physiques ?

Oui ☐ Non ☐

Si oui, à quelle occasion ?

6. Quelle est, selon vous, l'importance d'un enseignement portant sur les équations différentielles dans une formation scientifique générale du secondaire ?

Sans intérêt	☐	Peu important	☐
Assez important	☐	Très important	☐

7. Utilisez-vous des moyens informatiques lorsque vous traitez des équations différentielles?

Oui ☐ Non ☐

Si oui, lesquels ?

Calculatrice ☐

Ordinateur ☐

Précisez sur un ou deux exemple(s)

8. Les moyens informatisés permettent a priori une nouvelle approche et/ou un nouveau regard sur les équations différentielles. Pensez-vous que ceci constitue plutôt une aide ou plutôt une difficulté supplémentaire :

- Pour l'enseignant : Aide ☐ Difficultés ☐

....

Pour l'élève : : Aide ☐ Difficultés ☐

....

9. L'introduction des approches informatisées vous paraît-elle pertinente / légitime sur le plan scientifique ?

Oui ☐ Non ☐

Pour quelle(s) raison(s) ?

Annexe 5 : Questionnaire enseignant de physique

1. Indiquez la ou les périodes au cours desquelles vous avez enseigné en terminale scientifique

1960-1970 ☐ 1970-1980 ☐ 1980-1990 ☐ 1990- 2000 ☐ 2000- 2003 ☐

2. a). À quel(s) moment(s) de l'année traitez-vous actuellement les équations différentielles ?

Sept / Oct	☐	Nov / Déc	☐	Janv/ Fev.	☐	
Mars/Avr	☐	Mai / Juin	☐	Autre	☐	Préciser ....

b). Pour quelles raisons ?

Raisons institutionnelles	☐
Organisation personnelle	☐
Cohérence avec d'autres enseignements	☐

Autres raisons

3. Combien de temps (en heures) consacrez-vous à la méthode d'Euler ?

Cours ....

TD et /ou TP.......................

Exercices ....

4. Pensez-vous qu'il est préférable d'aborder les équations différentielles en cours de mathématiques avant leur utilisation en physique, ou bien l'inverse ?

Mathématiques d'abord	☐
Sciences physiques d'abord	☐
Simultanément	☐
Indépendamment	☐

Pour quelle(s) raison(s) ?

5. Travaillez-vous, sur ce thème, conjointement avec les collègues de mathématiques ?

Oui ☐ Non ☐

Si oui, de quelle manière ?

6. Quelle est, selon vous, l'importance d'un enseignement portant sur les équations différentielles dans une formation scientifique générale du secondaire ?

Sans intérêt ☐ Peu important ☐

Assez important ☐ Très important ☐

7. Utilisez-vous des moyens informatiques lorsque vous traitez des équations différentielles?

Oui ☐ Non ☐ Si oui, lesquels ?

Calculatrice ☐ Ordinateur ☐

Précisez sur un ou deux exemple(s)

8. Les moyens informatisés permettent *a priori* une nouvelle approche et/ou un nouveau regard sur les équations différentielles. Pensez-vous que ceci constitue plutôt une aide ou plutôt une difficulté supplémentaire :

Pour l'enseignant : Aide ☐ Difficultés ☐

Pour quelle(s) raison(s) ?

Pour l'élève : Aide ☐ Difficultés ☐

Pour quelle(s) raison(s) ?

9. L'introduction des approches informatisées vous paraît-elle pertinente / légitime sur le plan scientifique ?

Oui ☐ Non ☐

Pour quelle(s) raison(s) ?

Annexe 6 : Questionnaire faculté des sciences Orsay

L1-S1 Faculté des sciences d'Orsay Année universitaire 2005-2006

Ce court questionnaire s'inscrit dans la mise en place des nouveaux modules de la licence du système LMD.

> *Ce n'est pas une évaluation : il est anonyme.*

> *Il a pour but de faire le point sur ce que vous avez vu concernant les équations différentielles et nous aider à ajuster notre enseignement.*

> *Les questions sont courtes. Si vous ne savez pas répondre, indiquez simplement "je ne sais pas".*

En vous remerciant.

L'année dernière vous étiez en :

❑ Terminale S ❑ Deug 1ere année ❑ Autre (précisez) : ....

Une équation différentielle est une équation :

Cocher la ou les affirmation(s) qui vous semble(nt) correcte(s)

❑ qui porte sur des différences.
❑ qui contient une dérivée première.
❑ qui contient des dérivées première et seconde.
❑ dont la solution est une fonction.
❑ que l'on ne peut pas résoudre mathématiquement.

Exemple d'équation différentielle en mathématiques
Donnez un exemple d'équation différentielle :

Donnez une solution de cette équation en justifiant votre réponse :

Application des équations différentielles en physique
Présentez deux exemples étudiés en physique où interviennent des équations différentielles :

Soyez le plus précis possible.

-

-

Questionnaire A / 19/01/06 **Tournez SVP**

Annexe 7 : Protocole d'entretiens

Les réponses sont en italique

Classe A : Enseignants Gilberte (Maths) et Joël (Physique)

Transcription du protocole d'entretien : Gilberte (Maths)

Première question d'introduction :

1. Vous enseignez actuellement les mathématiques du nouveau programme de TS ; avez-vous enseigné auparavant les anciens programmes de Terminale scientifique ?

Oui, depuis dix ans !

Questions "intra-mathématiques"

Dans le programme actuel de mathématiques, la notion d'équation différentielle est très liée à la notion de fonction exponentielle

2. Comment introduisez-vous chacune de ces notions ?

Depuis cette année, la fonction exponentielle est introduite avant la fonction logarithme. Ce qui n'était pas le cas dans les anciens programmes. Donc on demande d'introduire la fonction d'Euler de façon physique (physicienne) par la méthode d'Euler. La fonction exponentielle est une solution d'une équation différentielle avec une condition initiale particulière et nous commençons par la dessiner grâce à la méthode d'Euler. On a besoin, nous, des suites, donc d'introduire avant le vocabulaire et les méthodes de convergence des suites. Avant les équations différentielles, il faut avoir parlé des suites. L'équation différentielle est amenée comme une relation entre la dérivée et la fonction avec une condition initiale mais en liaison avec un problème physique.

Pour moi, ce n'est pas une contrainte de travailler avec les physiciens car depuis plusieurs années j'ai essayé de faire le cours de mathématiques en fonction de ce que le programme disait mais de toujours inclure mais après (a postériori) son utilisation dans la physique ou la biologie. Là ce qui est nouveau c'est qu'à partir d'un problème physique. On bâtit une notion mathématique nouvelle. C'est ça ce qui est nouveau.

3. Quelles sont les difficultés rencontrées par les élèves ?

Les principales difficultés sont qu'ils ne maitrisent pas l'outil des suites mathématiques. C'est très difficile de parler de méthode d'Euler quand ils ont très peu fait de suites en première. Donc il y a toute une partie (un mois environ) à passer avant d'introduire la fameuse équation différentielle qui permet de définir l'exponentielle. Ensuite, comme c'est une méthode nouvelle pour eux, ils ont beaucoup de mal à concevoir l'existence d'une fonction par un dessin. Puisque c'est comme ça qu'on la prouve, elle existe parce qu'on la voit, on la dessine point par point. Ensuite la mathématique arrive pour montrer que c'est la seule solution de l'équation différentielle et que, elle convient pour le problème posé. Donc c'est une démarche qui ne leur est pas courante et qu'il n'attendait d'un mathématicien. Pour eux c'est empirique, est ce que ça suffit pour montrer que l'exponentielle existe. « Attendez mon cours vas arriver .mais d'abord on va toucher l'outil et puis après je vais vous montrer qu'elle existe, qu'il est unique et qu'il a des propriétés, etc ».

4. À l'issue des cours sur cette partie du programme, que doit représenter à votre avis pour l'élève l'expression "équation différentielle" ? (Quel sens doit-il lui donner ? Quelle "représentation mentale" doit-il se faire ?)

Un problème qu'ils ont du mal à résoudre, voilà ce que ça représente à la fin du cours. Une horreur ; quand ils voient arrivée une équation différentielle, ils ont peurs. Ça leur fait très peur par ce en fait ils ne voient qu'un modèle d'équation différentielle, celle qui donne l'exponentielle et en général les problèmes la compliquent avec un second membre avec une fonction dépendant de la variable, alors que l'équation différentielle traditionnelle ...c'est égale zéro. Et donc ils ont toujours peur de ce prolongement de l'exercice, donc c'est un exercice quand il est présenté sous sa forme mathématique leur fait énormément peur ; ce qu'ils en retiennent pas grand chose malheureusement.

5. L'utilisation de l'approche numérique et des instruments informatisés (ordinateur ou calculette) vous paraît-elle une aide ? (ou bien est-ce l'introduction d'un nouveau "point de vue" : le point de "l'informaticien" ?)

Pour les équations différentielles, l'outil minimum que j'utilise, c'est la calculatrice ; pour obtenir rapidement un tableau des valeurs pour tracer la fonction exponentielle il faut avoir la calculatrice. Je ne me sers pas de l'ordinateur. par ce qu'il faut se déplacer dans une salle, je trouve que c'est du temps perdu quand on a trente quatre élève en terminale, un gros programme à faire, ... la calculatrice... c'est le moins possible pour mon cours.

... C'est sans difficultés ?

Ha ! Au début il ya de grandes réticence. Ils ont des difficultés. Ils ont tendance d'utiliser l'outil calculatrice très vite, trop vite pour tout, comme une aide aux formules, une vérification de calculs j'essaie alors de leur apprendre à distinguer entre l'antisèche et puis l'aide effectif que peut donner la calculatrice comme vérification d'une hypothèse ou des choses comme ça.

Mais je n'ai pas le temps de travailler avec et de plus en plus je m'en éloigne. L'endroit effectivement privilégié où je m'en sers c'est dans le chapitre de la méthode d'Euler, après on l'oubli.

Vous êtes amené à expliquer l'usage de la calculatrice, avez vous l'impression de faire toujours les mathématiques ?

Non, moi je ne me retrouve pas en tant que mathématicienne, c'est une incursion dans quelque chose qui n'est pas de la mathématique, mais c'est un aspect des mathématiques que je revendique, la mathématique au service de la physique et de la biologie. Je n'arrête pas de dire aux élèves que les mathématiques pures, c'est une chose de très bien, mais si elle ne trouve pas une application, ça reste un objet joli dans une boule de cristal. Mais les mathématiciens font en sorte d'utiliser leurs outils ou de rendre utiles leurs outils aux autres. C'est dans ce but là qu'on travail

Questions à propos de la relation avec la physique

Selon le programme, l'introduction et l'utilisation des équations différentielles doivent être faites conjointement en mathématiques et sciences physiques.

6. Travaillez-vous conjointement ou en collaboration avec votre collègue de physique ? Si oui, à quel moment du programme ?

Oui, monsieur X, mais avec d'autres ça ne l'est pas.

Pour moi il faut qu'un enseignant conçoive la partie mathématique de son programme et accepte de travailler premièrement en collaboration et deuxièmement accepte de se servir de l'outil mathématique avec la même rigueur qu'un mathématicien et ça tous les profs de physique ne le font pas.

Sur quelle partie du programme ?

Sur la fonction exponentielle, la fonction logarithme, ... Essentiellement ces deux chapitres là qui sont à peu près conjoint dans les classes de terminale scientifique

Dans la fonction exponentielle vous regardez implicitement les équations différentielles ?

Oui puisqu'on démarre par là. Mais c'est bien la seule équation différentielle qu'on traite dans le programme des mathématiques. Je pense que le physicien a besoin d'autres équations différentielles que nous on n'introduit pas mais qu'on introduisait dans les anciens programmes... les équations du second ordre.

A ce propos, les équations différentielles du second ordre ne sont plus au programme de mathématiques, mais sont utilisées en physique : cela ne constitue-t-il pas une incohérence dans l'articulation math-physique ?

Pour moi, oui. Il serait mieux pour la formation des esprits que l'outil mathématique précède l'acquisition ... par le physicien. C'est dommage de faire disparaître des équations différentielles qui n'étaient pas inaccessibles ou très difficile pour l'élève et donnaient aussi un support d'application non négligeable pour les mathématiciens. A partir d'un problème de physique on arrivait naturellement à l'équation différentielle et naturellement on arrivait aux solutions. C'était une partie du programme agréable.

Vous n'êtes pas tenté de les introduire parfois ?

Je n'ai pas de place dans le programme pour le faire, mais quand je fais étudier les fonctions trigonométriques, il m'arrive de dire « tiens la fonction sinus, si on la dérive deux fois il y a une relation entre la dérivée second et la fonction... vous apprendrez plus tard que ... ». ça reste une parole en l'air.

7. Dans les manuels scolaires, on trouve des exercices qui font référence à une question de physique (exemple ci-joint) ; utilisez-vous / favorisez-vous ce type d'exercices ?

Oui,

Tentez-vous de donner un sens physique au(x) résultat(s) de l'exercice ?

dès qu'il y en a un qui est proposé en activité préparatoire. Par contre, lorsque je fini le cours, et que je passe aux exercices d'applications, j'ai plutôt tendance à les délaisser parce que le temps m'est compté pour finir le programme et je privilégie les exercices théoriques, méthodologiques qui pourra apprendre quelque chose d'universelle à l'élève pour pouvoir décalquer dans un autre problème si vous voulez. Pour moi, en exercice, si j'ai du temps à la fin de l'année, par curiosité, on ira voir ce qui se passe. En exercice non, en activité préparatoire oui. Parce que, j'estime qu'un problème mathématique est souvent sous-tendu par un biologiste, un physicien et donc on s'interroge

Le mathématicien résout avec les outils qu'il a ou des outils nouveaux c'est parfois l'occasion de créer des structures nouvelles et puis rend le « bébé » aux physiciens ou aux biologistes qui l'applique à son problème. Donc, pour la culture scientifique, j'aime bien que les élèves associent réalité mathématique et problèmes annexes. Toujours la même idée que la recherche fondamentale mathématique existe mais si elle n'est pas appliquée c'est dommage.

Avez-vous l'impression de faire de la physique quand vous traitez ce genre d'exercices ?

Si, un peu mais ça me rappelle des vieux souvenirs, et ça me fait plaisir à moi et je pense qu'on montrant aux élèves qu'il y a un lien entre les deux disciplines, on arrive à leur faire accepter que la science est un tout et qu'il n y a pas un esprit mathématique, un esprit physique, un esprit biologiste mais que derrière trois sciences qui sont enseignées au lycée il y a la même rigueur, il y a un esprit de rigueur à acquérir et que il n'y a pas de frontière, un mathématicien peut bien poser un regard sur un circuit électrique et traiter ou devant une *population de bactéries du moment où il a des données initiales il saura mettre le problème en équation. Donc cette interactivité de l'esprit scientifique j'aime bien leur montrer que je peux bien faire de la biologie, de la physique ; je ne suis pas toute seule dans mon cas*

Pour revenir à la question sur l'introduction des équations différentielles à partir de la fonction exponentielle. Ce sont deux notions nouvelles. Quel type de difficulté ressentez-vous ?

Il y a la notation y'= ay (ou y'=ay +b). Pour eux y c'est une ordonnée, donc un réel. Penser que c'est fonction qui varie et qui puisse avoir une dérivée, il y a déjà un petit un déblocage à faire dans la cervelle. Donc au niveau des notations, il y a déjà quelque chose à leur faire passer, il y a un blocage à éliminer

Question pour "conclure"

9. L'étude des équations différentielles reste-t-elle difficile pour les élèves actuels de Terminale S ? Si oui, serait-il pensable / judicieux de supprimer ce thème des programmes de lycées ?

Transcription du protocole d'entretien : Joël (Physique)

Phase d'introduction

Première question d'introduction:

1. Vous enseignez actuellement la physique du nouveau programme de TS ;

Oui !

Avez-vous enseigné auparavant les anciens programmes de Terminale scientifique?

Une quinzaine d'années, peut être plus : 18, 19 ans !

Questions "intra-physique"

Dans le programme actuel de physique, les équations différentielles se rencontrent en plusieurs points du programme.

2. À propos de quelle étude êtes-vous amené à introduire cette "notion" nouvelle ?

Je vais prendre le programme dans l'ordre, ça commence en fait en radioactivité, puis on a l'apparition des équations différentielles dans le circuit RLC, dans les circuits RL, RC et puis après en mécanique avec les chutes : on commence par les chutes verticales. Et puis on les retrouves dans les oscillateurs.

3. À cette époque de l'année, les élèves ont-ils vu les équations différentielles en mathématiques ? ... Est-ce qu'une équation du type $RC\frac{dUc}{dt}+Uc=E$ est facilement "reconnue" comme une "équation différentielle de mathématicien" ?

Par rapport au moment où on commence c'est un tout petit peu difficile

Je crois je n'ai cherché à leur demander s'ils connaissaient, ça me paraissait être assez évident, c'est à dire que lors de la présentation, on montre qu'il la fonction et la dérivée de la fonction dans la même équation. C'est vrai que je ne me suis pas attaché à leur faire reconnaître.

Par contre, ... la terminologie déjà « équation différentielle » a été évoqué ; vous avez vu ça en mathématiques, vous reconnaissez ici que...

Il ne faut pas oublié que le programme de physique –chimie est extrêmement volumineux en terminale et que les critiques fusent de partout pour dire qu'il faut diminuer le volume du programme. On n'essaie d'aller souvent au plus direct, pour privilégier certains aspects du programme, certains cheminements, certaines démarches.

4. Quelles sont les difficultés rencontrées généralement par les élèves dans cette articulation maths-physique ?

Je dirais que le terme leur fait un peu peur. A partir du moment où on leur dit voilà on a un outil mathématique à mettre en œuvre, ça les affole un peu. Je ne crois pas que ça soit dans la réalisation qu'ils ont des problèmes. C'est plus quasiment psychologique.

Si quand même. Dans la résolution de l'équation différentielle, quelle solution les mathématiques nous offrent pour résoudre cette équation ?

Là, j'ai procédé de deux façons différentes l'an dernier et cette année.

L'an dernier, j'ai voulu procéder comme en mathématique et faire de la physique dessus. C'est à dire, on les coefficients, la forme générale c'est ça. Maintenant la physique nous impose qu'à t=0 on ait ceci ; et lorsque t tend vers l'infini qu'on ait telle chose. Donc ça nous impose ceci, et les coefficients ..., du coup on fait retourner la manivelle et on arrive à telle résultat. L'an dernier ça été çà et ... les élèves étaient perdus, complètement perdus.

Cette année, je me suis dit, on va faire efficace. La première fois qu'ils ont rencontrés les ED en physique ils ne l'avaient pas tout à fait encore rencontré en mathématiques, c'était à quelques heures près. Donc j'ai dit, voilà ... la solution, c'est ça. La fois suivant ... c'était dans le circuit RC. J'ai commencé à donner une petite ... où j'ai dit, vous avez remarqué ici que quand t tend vers t tend vers l'infini alors ... physiquement on associe la tension tend vers E, mais donc la première fois, j'avoue qu'on n'a pas retrouvé les différents coefficients depuis le départ.

Le problème qu'il pouvait y avoir, c'est d'identifier l'équation différentielle en physique. Ils la voient sous une certaine forme en mathématique, est ce qu'ils vont la reconnaître en physique. S'ils la reconnaissent, a priori ils devraient savoir comment la traitée et ne surtout pas en avoir peur. Ceci dit, me semble quand même les collègues des mathématiques utilisent, au moins pour un certain nombre d'entre eu, des exemples de physique, nous facilitant ainsi la tâche. Mais je sais si tout le monde fait ça.

5. En fin d'année scolaire, que doit représenter à votre avis pour l'élève l'expression "équation différentielle" du point de vue du "physicien" ? (Quel sens doit-il lui donner? Quelle "représentation mentale" doit-il se faire?)

Ce que j'aimerai bien, c'est que les élèves quand ils arrivent à une équation différentielle, d'abord ils devraient savoir, alors ce n'est pas évident pour eux par ce qu'ils n'ont pas le recul nécessaire, ils devraient savoir que si on arrive à trouver une équation différentielle, alors on pourra déterminer l'évolution du système. Mais je crois, ce serait leur demander d'avoir beaucoup de recul quand. A partir de l'équation différentielle, si on la résout, on va pouvoir prévoir...

Je dirais que, on en parle un petit peu, on leur dit que ED, on a des méthodes de résolution, soit, analytique, soit méthode d'Euler et puis on peut leur expliquer le phénomène, voir si ça colle ou ça ne colle pas par rapport aux phénomènes observés, et puis prévoir une évolution.

6. L'utilisation de l'approche numérique (méthode d'Euler) et des instruments informatisés (ordinateur ou calculette) vous paraît-elle une aide ? Ou bien est-ce l'introduction d'un nouveau "point de vue" ("informaticien") qui vient se surajouter ?

Alors, une aide !, une aide en quoi. Si c'est la compréhension forcement immédiat. J'aime bien mettre la méthode d'Euler en œuvre pour ce qui est des mouvements. Je crois que c'est de là qu'il faudrait partir et pas comme indiqué dans le programme ...à partir de la radioactivité ou là. C'est une partie extrêmement ardue, extrêmement difficile. Même pour les circuits électriques ; Par contre pour les mouvements, ça me paraît presque palpable. On a une position, une vitesse, une position initiale, une vitesse initiale, on a l'équation et on peut calculer où sera le point un moment après. Ça me paraît intéressant pour comprendre cette histoire d'évolution.

Il y a la nécessité du bac, on reste parfois terre à terre.

Questions à propos de la relation avec la physique

L'introduction et l'utilisation des équations différentielles doivent être faites conjointement en mathématiques et sciences physiques.

7. Proposez-vous des sujets d'exercices de physique à vote collègue de mathématique ? Si "oui" lesquels ? Si "non" : savez-vous s'il propose des exercices portant sur des phénomènes physiques (tel que celui-ci).

Proposer non. Par contre, comme on se croise assez souvent, il m'est arrivé à lui dire j'ai traité de ceci, de cela, j'ai telle réaction des élèves.

8. Les équations différentielles du second ordre ne sont plus au programme de mathématiques, mais sont utilisées en physique : cela ne constitue-t-il pas une incohérence dans l'articulation maths-physique?

Incohérence, non pas forcement puis qu'il y a, ...on parlait de sens tout à l'heure, l'équation différentielle qu'elle soit du premier ordre, du deuxième ordre, coefficient constant ou pas, au delà nous en physique on est très limité. On dit qu'on associe, ... sachez qu'on a une solution qui nous est proposée par exemple $X=x_m \cos\omega t$ maintenant on dit $\cos(2\pi/T\ t+\varphi)$, et puis on regarde si ça colle et au miracle ça colle à condition que... ce qui nous permet d'identifier un *coefficient. Je dirais, que ça ne me paraît pas dramatique d'être traiter en profondeur en mathématique.*

Est ce vous éprouvez des difficultés particulières lorsque vous enseignez les ED ?

Je n'enseigne pas les ED. ...Donc je suis tranquille !!

De temps en temps on revient pour dire que vous voyez ça c'est une équation différentielle, mais pas de rappels mathématiques. S'il ne doit pas y avoir d'allégement de programme, je crois que je ferai encore comme cette année, c'est à dire j'irai au plus direct. Je ne souhaite pas perdre mes élèves dans des développements mathématiques. Parce que, quand les élèves rencontrent une difficulté, les élèves vont s'attacher à ça. Or dans le cours, ce n'est pas cette partie là qui est primordiale. Ça ne fait pas partie des compétences exigibles, donc on va se limiter, c'est vrai que de temps en temps on va faire quelques démonstrations. Mais quand on voit la tête des élèves quand on fait cette partie ...on se dit non, il faut arrêter les dégâts quoi.

Question pour "conclure"

9. L'utilisation des équations différentielles reste-t-elle difficile pour les élèves actuels de Terminale S ?

Si oui, serait-il envisageable / intéressant de supprimer cet aspect très mathématique des programmes de physique de lycées ? (et de privilégier une approche plus phénoménologique)

Quelle physique on ferait sans les ED. Elles sont incontournables. On y attachait une importante moindre au paravent dans les anciens programmes mais pourtant elles étaient là.

Classe B : Enseignants Olivier (Maths), Florence (Physique)

Transcription du protocole d'entretien : Gilberte (Maths)

Première question d'introduction :

1. Vous enseignez actuellement les mathématiques du nouveau programme de TS ; avez-vous enseigné auparavant les anciens programmes de Terminale scientifique ?

Oui. J'ai enseigné, la première année en 91-92 avec les anciens programmes et là j'enseigne depuis de 1996.

Questions "intra-mathématiques"

Dans le programme actuel de mathématiques, la notion d'équation différentielle est très liée à la notion de fonction exponentielle

2. Comment introduisez-vous chacune de ces notions ?

Depuis le programme de 2001, on introduit la fonction exponentielle comme solution d'équation différentielle y' = y et f(0) = 1. On va définir une fonction vérifiant qu'elle est la même quand la dérivée est la même, qui vaut 1 en 0 ; on va essayer de construire son graphe puis après avoir un certains nombre de propriété de cette fonction, par des méthodes [...] on arrive à trouver pas mal de propriétés de cette fonction et, ... on l'introduit de cette manière là. On construit son graphe à l'aide de la méthode d'Euler ; on utilise la méthode d'Euler sur des exemples de subdivisions d'un intervalle, ça peut être sur [0 ; 1], ça peut être sur [0 ; 2], le professeur est libre de choisir l'intervalle qu'il veut. Et puis on approche son graphe, après on arrive à trouver, avec y' = y que la fonction est positive, ne s'annule jamais, qu'elle est croissante et puis, on définit que cette fonction est unique, on montre qu'il n'existe qu'une seule fonction définie par y'=y et y(0) = 1 ; et comme elle est unique, on peut la définir et on l'appelle la fonction exponentielle.

Quand vous chercher à définir les propriétés de la fonction exponentielle, vous vous servez de y'=y. Est-ce que vous l'appelez déjà par son nom c'est à dire « équation différentielle » ?

J'en parle un peu au départ ; je leur explique ce que peut être une équation différentielle ; des exemples d'équations différentielles qui n'ont pas trop de lien avec la réalité. Je peux donner n'importe quoi et puis on essaie d'expliquer ce que l'on veut faire ; résoudre une équation différentielle c'est, trouver toutes les fonctions dont les dérivées première, seconde, troisième ... vérifie une certaine relation sur un intervalle qui est donné. Bon ça c'est qu'on va vite ; est-ce qu'ils voient un intérêt tout de suite, ça m'étonnerait. Mais ça c'est le premier abord pour pouvoir définir la fonction exponentielle. Après on revoit les équations différentielles, on les solutions générales de y'= ay et l'autre c'est y' = ay + b. et là on fait les exercices et on parle vraiment des équations différentielles.

3. Quelles sont les difficultés rencontrées par les élèves ?

Je crois que la notion d'équations, ils pensent à des nombres ; différentielle, ils ont du mal à trouver, ... à voir ce que c'est que la solution.

4. À l'issue des cours sur cette partie du programme, que doit représenter à votre avis pour l'élève l'expression "équation différentielle" ? (Quel sens doit-il lui donner ? Quelle "représentation mentale" doit-il se faire ?)

L'équation différentielle, surtout en physique pour lui, ça devrait penser plus à modélisation, à un problème particulier de physique appliqué aux maths. On est là beaucoup plus à étudier les comportements des solutions (...) ; Je ne sais pas si vous avez déjà regardé les exercices qui sont donnés en terminale S.

5. L'utilisation de l'approche numérique et des instruments informatisés (ordinateur ou calculette) vous paraît-elle une aide ? (ou bien est-ce l'introduction d'un nouveau "point de vue" : le point de "l'informaticien" ?)

Non c'est une aide. Le problème ici c'est qu'on ne peut pas avoir accès à toutes les ... On fait la méthode d'Euler en théorie après on les met sur les (...) pour la partie pratique.

Je leur explique un peu en détail comment ça fonctionnait ; (...) je leur ai fait tirer des graphiques que j'ai tirés chez moi pour leur montrer comment ça fonctionnait. Certains qui ont Excel chez qu'ils puissent se débrouiller et puis s'ils ont des problèmes on leur explique

Par exemple, quels types de problèmes?

Des problèmes liés au logiciels, mais ça c'est des petits problèmes techniques

Est ce que vous pensez qu'ils ont assimilé le principe de cette méthode enseigné, normalement en classe de première ?

Non, non, ils n'ont pas assimilé, je réexplique ; c'est clair qu'il faut revenir à cette méthode là en TS. C'est sûr à mon avis, ils n'ont pas très bien compris l'intérêt profond ... sinon, ils ont compris quand même ; il faut leur rappeler comment ça fonctionne. Si d'emblée tu leur demande d'appliquer la méthode d'Euler avec une fonction ... à mon avis ils seront susceptible de me redire exactement comment ça fonctionne. Ce qui est normal parce qu'on le voit au début, on ne reste pas trop dessus parce que (...).

Utilisez-vous l'ordinateur ou la calculatrice ?

L'ordinateur

Quand vous êtes amené à expliquer les outils d'un logiciel, avez vous l'impression de faire toujours les mathématiques ou alors vous glissez vers l'informatique ?

Je pense que c'est toujours des maths ; on va utiliser un logiciel pour approcher une fonction, ça reste dans les mathématiques.

La courbe obtenue par la méthode d'Euler est une courbe discrète (point par point), éprouvez vous la nécessité d'expliquer ce passage du continu au discret.

C'est vrai là il peut y avoir une difficulté ; on approche la courbe avec des portions de droites, avec des segments, pour eux il y a une petite difficulté c'est vrai ; les réactions qu'ils ont eu au début ; d'habitude on leur fait tracer des courbes des fonctions exactes mais là on leur demande des courbes approchées. On doit leur dire que ce n'est pas la vraie courbe, ça donne une idée.

<u>Questions à propos de la relation avec la physique</u>

Selon le programme, l'introduction et l'utilisation des équations différentielles doivent être faites conjointement en mathématiques et sciences physiques.

6. Travaillez-vous conjointement ou en collaboration avec votre collègue de physique ? Si oui, à quel moment du programme ?

Elle m'a dit de faire l'exponentielle le plus rapidement possible (rire). Elle a parlé des ED avant moi. Donc ils ont eu des ED d'après ce qu'elle m'a dit, pour pouvoir faire ... elle avait *des choses à traiter. Quand je les ai vus, ils avaient déjà entendu parler et appliquer aussi. ... mais c'est vrai que non, il n'y a trop de contact.*

7. Dans les manuels scolaires, on trouve des exercices qui font référence à une question de physique (exemple ci-joint) ; utilisez-vous / favorisez-vous ce type d'exercices ?

Oui bien sûr. L'intérêt c'est qu'ils les voient aussi en physique. C'est pour leur monter qu'il n'y a pas que les maths ou pour rendre plus attrayant. C'est aussi plus attrayant d'utiliser (...). Là ils voient à quoi ça sert. De toute façon c'est ce qui est conseillé dans les programmes, c'est très bien. Il y a ça mais aussi pas mal de ... il y a refroidissement d'un corps, loi de Newton. On ne peut pas le faire tout le temps mais il faut le voir. Ça dépend de la classe mais on y arrive toujours.

Tentez-vous de donner un sens physique au(x) résultat(s) de l'exercice ?

C'est vrai qu'après la mise en équation, si ce n'est pas un système ... je tente oui ; en général ils ont l'habitude plus ou moins, donc ça ne leur pose pas trop de problèmes. Si c'est une équation comme celle-ci, bon en général, ...il y a des choses qui ne demandent pas de connaissances de physique élaborées. Par exemple là le refroidissement d'un corps ...on suppose pas mal de chose, on ne démontre pas. On suppose puis après ... on passe vite à résoudre des équations.

Pour moi, il n'y a pas de problèmes pour ça ; étant scientifique, ma formation scientifique me permet de comprendre.

Ils sont nombreux qui pensent que tels que formulés, ces exercices de physique relèvent d'un habillage

Oui, mais on peut toujours discuter ; il faut dire qu'au bac ils ont eu un sujet de type là ; donc il faut aussi les préparer. ...cette année il y a eu au bac un sujet où justement il y avait une histoire de mécanique, un chariot qui circulait sur des rails ; il y avait des équations différentielles qui modélisaient la vitesse du chariot.

Vous pensez que ce sont là de réelles mises en relation des disciplines autour d'activités de modélisation ou simple habillage ?

Là c'est la physique, il y a aussi un exercice où c'est en relation avec la biologie, multiplication de bactéries. On arrive à une équation différentielle et euh ...j'ai demandé au prof de bio s'ils ont déjà fait ça, il m'a dit « non, non » ... (rire) ...on peut le faire, mais ils ne le font pas.

Et sur les équations différentielles du second ordre qui ne sont plus aux programmes de mathématiques, alors qu'elles sont enseignées en physique. Est-ce pour vous, cela constitue une incohérence dans cette articulation maths-physique ?

Mais en physique, ils ne les utilisent plus, ils utilisent plus que l'équation du pendule y'' + ay

Ils utilisent aussi ay'' + by' + cy égale à une fonction, comme dans la modélisation du circuit RLC ou dans le cas d'un ressort amorti, ou dans d'autres cas pendule

Oui, d'accord. Mais moi je ne m'en plaints pas parce que je n'ai pas à les utiliser. C'est plutôt ma collègue de physique qui doit se plaindre. Moi je pensai qu'ils n'utilisaient que l'équation $y'' + \omega^2 y$.

En tout sur ce qui se fait en physique, je m'y intéresse de loin. On n'a pas trop de contact mais on s'entend très bien.

<u>Question pour "conclure"</u>

9. L'étude des équations différentielles reste-t-elle difficile pour les élèves actuels de Terminale S ? Si oui, serait-il pensable / judicieux de supprimer ce thème des programmes de lycées ?

Non ! Impensable

Transcription du protocole d'entretien : Florence (Physique)

<u>Première question d'introduction:</u>

1. Vous enseignez actuellement la physique du nouveau programme de TS ; avez-vous enseigné auparavant les anciens programmes de Terminale scientifique?

Oui, tout à fait, moi j'ai enseigné les précédents, les précédents encore ; ça fait vingt huit ans que j'ai les terminales scientifiques. ... ça commence à faire beaucoup !

Questions “intra-physique”

Dans le programme actuel de physique, les équations différentielles se rencontrent en plusieurs points du programme.

2. À propos de quelle étude êtes-vous amené à introduire cette "notion" nouvelle ?

Elle est nouvelle en physique pour eux cette année en mécanique. Ce n'est pas forcément le choix du programme ; c'est un choix personnel. Ce qui est prévu normalement c'est d'introduire l'équation différentielle une première fois en radioactivité. L'ordre normal du programme c'est ça. en principe le professeur de mathématique doit donné les outils de probabilité, de manière à faire comprendre aux élèves que lors d'un choix aléatoire, partant de l'idée que le noyau ne vieillit pas et comme on ne sait pas quand il va mourir, donc on part d'une population dont on ne sait pas précisément quand chaque individu va mourir, il fait une étude probabiliste sur cette échantillon, et en fait il arrive à montrer que l'évolution de la population au cours du temps aura une allure exponentielle décroissante. Il y a déjà ce premier pas qui doit être fait par le prof de maths et normalement le professeur de physique enchaîne derrière pour écrire l'équation différentielle adaptée cette ... fonction qui donne l'évolution du noyau en fonction du temps.

Moi je n'ai pas fais ce chois, justement avec mon collègue de mathématiques j'étais trop en avance sur lui, et c'est ce qui nous arrive à tous malheureusement depuis 2 ou 3 ans. On n'arrive pas du tout à se connecter. Ce que j'ai fait comme choix c'est de lui laisser introduire les équations différentielles en mathématiques et puis, j'ai attendu un petit peu et puis, entre temps je me suis dit ça sera en mécanique cette année.

Sinon il y a un autre endroit où il est possible de les introduire, c'est en électricité avec l'étude du circuit RC, après on fait l'étude du circuit RL sur les mêmes modalités ; et la toute dernière occasion qu'on a d'écrire les équations différentielles d'un autre type, là c'est du second ordre avec solution sinusoïdale, c'est à propos des oscillations du pendule élastique, *il y a aussi l'oscillateur harmonique ou bien le circuit oscillant. Ça se termine comme ça ; ça fait pas mal d'occasion dans l'année.*

Par contre les professeurs de mathématiques n'abordent plus, ce n'est plus dans leur programme, les équations différentielles du second ordre. Pour nous c'est un gros problème en physique.

D'accord ! On en a parlé toute à l'heure. Si j'ai bien compris, vous attendez un travail collaboratif avec votre collègue de mathématique

Oui

3. À cette époque de l'année, les élèves ont-ils vu les équations différentielles en mathématiques ?

Oui.

Est-ce qu'une équation du type $RC\frac{dUc}{dt}+Uc=E$ est facilement "reconnue" comme une "équation différentielle de mathématicien" ?

Je dirais qu'elle est reconnue comme étant un groupe de signes, auquel l'élève va réagir en disant que "ça, ce qu'il faut que j'écrive pour ça, je connais le raisonnement que je vais suivre" mais je ne suis pas du tout certaine qu'il l'apparente à une équation différentielle.

4. Quelles sont les difficultés rencontrées généralement par les élèves dans cette articulation maths-physique ?

Ils ont une difficulté de rapidité de calcul ; ils ont peu de capacités à anticiper donc ils se perdent souvent ... lorsqu'ils font des mathématiques ce sont des mathématiques, ce n'est pas le même état d'esprit lorsqu'on fait de la physique où les mathématiques interviennent. Ils ont déjà de grandes difficultés à faire le lien pourtant, on essaie de s'en tenir aux notations du professeur de mathématiques ; parce que, sinon c'est un autre souci. On essaie d'être très cohérent là dessus ; mais finalement on ressent les mêmes difficultés que ceux qu'ont les professeurs de mathématiques : ils sont lents dans le calculs, ils ont du mal à identifier les *objets, ils ont du mal aussi à restreindre, parce que tout compte fait notre champ d'activités à nous est très restreint ; donc finalement, on utilise qu'une toute petite partie dans ce cours de physique de terminale, de ce qui peut être enseigné dans le cours de mathématiques. Donc ils ont du mal à faire le bon choix, les bons outils.*

Et puis l'autre difficulté c'est le fait que nous devront introduire nous des outils qui n'ont pas été introduit en mathématiques, je parlais des équations différentielles du second ordre et là on fait, ce qu'on peut quoi. Et sans doute ce qui est vrai il y a une double difficulté qui est très mal vécu par les élèves. Pour eux c'est une recette, c'est un raisonnement qui s'apprend du début à la fin. Je crois que très peu d'entre eux ont conscience de ce qu'ils sont en train de faire.

Mais moi, j'aimerai que les mathématiques ne soient pas vécues pour eux comme un simple outil. J'aimerai arriver à leur faire comprendre c'est ce qui structure la physique, ça fait partie de la physique ... (rire) ; c'est vraiment une ambition beaucoup trop grande.

C'est vrai que ce programme se prête quand même assez bien pour montrer cette articulation. Mais sincèrement là, c'est peut être ... chaque année, là c'est depuis 2 ans, 2 programmes complets que j'enseigne, là j'en suis au tiers de l'année ; j'aurai peut être sur trois générations, 10 élèves qui auraient un peu senti ça et encore, je suis optimiste ... (rire)

5. En fin d'année scolaire, que doit représenter à votre avis pour l'élève l'expression "équation différentielle" du point de vue du "physicien" ? (Quel sens doit-il lui donner? Quelle "représentation mentale" doit-il se faire?)

Il me semble que la plupart d'entre eux arrivent à se dire que c'est une relation qui mêle une fonction avec ses dérivées premières ou secondes, et un certain nombre de constante, en gros ils identifient là assez clairement une équation différentielle. Certains d'entre eux sont capable de réaliser que les constances en question font partie du système physique défini et que c'est constantes vont peut être dépendre des conditions initiales. Ça c'est possible qu'ils le sentent mais, mais en gros euh ... je pense que je suis peut être trop optimiste. Il me semble ils font une différence essentielle entre les mathématiques et la physique ; donc en physique, comme je vous le disais tout à l'heure, ils ne reconnaissent pas l'équation différentielle, ils reconnaissent une relation un groupe de signes sur lequel ils déclenchent un raisonnement qui, finalement est toujours le même. J'ai bien peur que ça ne soit que ça, voyez !

Vous sentez qu'il y a un cloisonnement entre les mathématiques et la physique ?

Ah oui, tout à fait. ...Si j'avais la possibilité de vérifier ça plus précisément, j'essayerai par exemple de leur faire établir une équation différentielle dans un domaine où, justement la structure de l'équation différentielle n'est pas celle qu'ils ont l'habitude de voir, et puis de leur demander quel nom générique on pouvait donner à ce type de relation. Je suis certaine qu'aucun ne répond. Voyez, c'est peut être pas de leur faute ni de la notre, c'est simplement ce n'est pas suffisant peut être comme enseignement en terminale pour prendre ce recul, voyez. C'est peut être encore un peu trop quoi. Et puis, même si ils pouvaient prendre ce recul, en quoi ça leur rendrait plus performant ... je ne sais pas. Je ne sais pas ce que ça pourrait leur rapporter d'avoir cette vue un petit peu comme ça à distance ; je ne suis pas sûr que soit important pour eux, a priori, pour avoir leur base, pour les objectifs qu'ils ont à atteindre, à part quelques élèves comme ça qui ont beaucoup de goût pour la spéculation intellectuelle, qui vont être curieux de nature, qui vont se poser ce genre de questions. Mais la majorité d'entre eux, ne se le posent pas parce que, finalement on ne leur laisse pas le temps, ça n'offre pas d'intérêt pour la réussite immédiat de leurs objectifs. Je crois que c'est toutes ces raisons qui font que, on passe à côté de pas mal de choses, mais il ne faut leur en vouloir non plus.

6. L'utilisation de l'approche numérique (méthode d'Euler) et des instruments informatisés (ordinateur ou calculette) vous paraît-elle une aide ? Ou bien est-ce l'introduction d'un nouveau "point de vue" ("informaticien") qui vient se surajouter ?

J'ai quand même l'impression qu'on montre là quelque chose d'assez réaliste, si vous voulez je ne fréquente pas de chercheurs, tout compte fait le monde de la recherche je l'ignore totalement et j'imagine, voyez là c'est du domaine de l'imagination, que quand même bien souvent on doit avoir recours à des méthodes numériques. Parce que les équations différentielles qu'on élabore à partir d'un modèle, elles ont très peu de chance de tomber dans le champ des équations différentielles classiques que l'on sait résoudre par des modalités, par des démonstrations connues, il me semble que là, on n'est un peu plus réaliste au près des élèves, on est un plus authentique et même, ça je l'ai ressenti quand même, c'est même un petit peu dommage dans le fond que l'on propose comme ça un modèle en kv, un modèle en kv^2, c'est un petit peu artificiel ; parce que j'ai quand même vue, malgré la faiblesse des classes que j'ai eu auparavant, des élèves vouloir continuer c'est à dire qui se *disaient pourquoi on s'arête à 2. C'est vrai que je me suis dit, dans le fond, on pourra peut être mettre n et puis après voir quel est ce nombre n plutôt que de, manière plutôt artificielle dire que c'est kv, c'est vrai que kv c'est bien, ça donne une équation qu'on sait résoudre, c'est peut être ça le point de départ, mais peut être après kv on pourrait peut être dire que c'était pas une puissance égale à 1, peut être qu'il faut chercher quelle est la puissance la plus cohérente. Là, on n'est pas allé assez loin ; j'ai vu des élèves qui partaient avec cette idée, ah oui ! C'est intéressant, et la notion de modèle elle est devenue très pertinente là. Cette méthode de résolution, elle n'est pas si énorme que ça à faire comprendre, elle n'est pas très coûteuse en temps ni en énergie. Les tableurs, les élèves savent s'en servir à peu près correctement ce n'est pas non plus un obstacle ; et je crois que finalement ce n'est pas une mauvaise idée d'avoir introduit ça dans les programmes parce que ça montre quand même de manière assez réaliste on peut saisir la complexité d'une simple chute, c'est pas mal. Moi je suis convaincu que c'est quand même intéressant et réaliste.*

Questions à propos de la relation avec les mathématiques.

L'introduction et l'utilisation des équations différentielles doivent être faites conjointement en mathématiques et sciences physiques.

7. Proposez-vous des sujets d'exercices de physique à vote collègue de mathématique ? Si "oui" lesquels ? Si "non" : savez-vous s'il propose des exercices portant sur des phénomènes physiques (tel que celui-ci).

Non. Je ne l'ai jamais fait. A vrai dire, on change de collègue de mathématiques chaque année. Cette année, je sens que ça pourra se faire par rapport aux collègues avec lesquels j'ai travaillé auparavant. Ce n'est pas impossible qu'on y arrive. Mais je ne l'ai jamais fait.

Est-ce que vous êtes amené à vous intéresser à ce que font vos élèves en mathématiques ?

J'y ai été amené par le biais des sujets de bac par exemple. Comme les programmes ont changé il y a deux ans, donc je suis allé voir les sujets qui avaient été donnés les deux années précédentes pour voir réellement la part application, parce tout compte fait pour eux c'est l'application au niveau des maths, c'est comme ça qu'ils le vivent en tout cas, était émergente au niveau des sujets et ça été le cas l'année dernière sur le sujet de Paris effectivement où dans une partie il y avait pas mal de physique finalement. Mais je n'ai pas été plus loin dans l'investigation.

8. Les équations différentielles du second ordre ne sont plus au programme de mathématiques, mais sont utilisées en physique : cela ne constitue-t-il pas une incohérence dans l'articulation maths-physique?

C'est un gros problème effectivement ; on pourrait qualifier cela d'incohérence parce que là les élèves sont sur un terrain totalement inconnu, ils n'ont que notre seul discours pour leur faire approprier les connaissances. En plus ce sont des connaissances difficiles car ils n'ont plus de connaissances sur les fonctions trigonométries en général beaucoup moins qu'avant. Donc là on touche à une partie de la physique qui est un apprentissage des formules. On n'est pas très convainquant. Disant que, ce qui est intéressant ce sont les phénomènes développés parce qu'ils sont assez nombreux, il y a beaucoup d'analogie possible entre la mécanique et l'électricité. On a quand des moyens de leur montrer que dans la vie ces phénomènes là ont beaucoup d'importance. En spécialité après ils travaillent sur les ondes radios, encore il y a d'autres équations différentielles qui apparaissent. Donc on ne manque pas de possibilité de les convaincre ; c'est un champ disciplinaire très important je crois que quand on veut faire de la physique, on les perd un peu, on les noie un peu dans les difficultés. On ne peut pas ... on devrait peut être ne pas le faire, ne pas le faire en terminale

Je pense qu'il ne faudrait pas étudier les mouvements sinusoïdaux,

Question pour "conclure"

9. L'utilisation des équations différentielles reste-t-elle difficile pour les élèves actuels de Terminale S ? Si oui, serait-il envisageable/intéressant de supprimer cet aspect très mathématique des programmes de physique de lycées ? (et de privilégier une approche plus phénoménologique)

Non, je ne pense pas c'est plutôt le contraire. Je pense qu'il faut supprimer des parties de programme qui font apparaître d'autres équations différentielles ; il me semble que c'est plus de la physique, de la vraie physique, moi je la sens mieux comme ça, c'est des terminales, on ne fait pas ça en seconde quand même, donc ils sont capable de comprendre en terminale.

Mais je crois qu'il faut leur offrir la possibilité de tourner autour de types d'équations pas trop variées, resté sur les équations du premier ordre. Par contre moi je suis volontiers d'aller plus loin comme je le disais tout à l'heure, on pourrait avoir une puissance à rechercher, essayer de trouver un modèle plus adapté non pas resté sur un modèle en kv et un modèle en kv^2, ou bien on pourrait aller étudier un petit peu d'autres types d'équations dans d'autres domaines de la physique que la mécanique mais pas du second ordre. Il faudrait à ce moment là se cantonner à un type d'équations et montrer que la physique .... Ecoutez, de tout le temps, moi j'ai travaillé avec un programme qui était toujours articuler sur des phénomènes dépendant du temps ; je n'ai jamais vu autre chose finalement. On a ajouté et supprimer mais c'est toujours rester l'âme, aussi bien en physique qu'en chimie, en terminale on fait des phénomènes dépendant du temps. C'est difficile de dire que c'est un bon choix parce que je n'ai connu que ça donc je suis incapable de dire quel est le bon choix. Ça me semble assez cohérent comme progression en terminale, par contre là on touche de plus près de la physique. Je suis satisfaite de ces programmes. Là où je ne suis pas satisfaite, c'est l'encyclopédisme, on touche à trop de parties. A la fin par exemple on va parler de niveau d'énergie, mais c'est très intéressant, on en parlait un peu ...

Je ne serais pas pour la suppression, par contre rester plus modeste et ne pas chercher à couvrir toute la physique avec tous les types d'équations

TITRE :

Interactions entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire en France.

Cas des équations différentielles du premier ordre.

AUTEUR :

Malonga Moungabio Fernand

RESUME :

Le programme actuel de mathématiques de la classe de terminale scientifique incite les professeurs de mathématiques et de physique à mener un travail conjoint sur les équations différentielles. Cela nous a conduit à nous intéresser à l'articulation des enseignements de ce sujet dans les deux disciplines. Pour ce faire, nous avons choisi de caractériser la viabilité de la synergie entre les mathématiques et la physique en termes de continuité didactique.

En nous appuyant sur les travaux antérieurs mettant en jeu des interactions entre les mathématiques et la physique, nous avons choisi d'organiser notre recherche autour d'un certain nombre de questions : Comment apparaissent les équations différentielles dans les manuels scolaires de mathématiques et de physique ? Une continuité didactique entre ces deux disciplines existe-t-elle, et si oui, sous quelle forme ? La méthode d'Euler constitue -t-elle un champ propice ? Comment les enseignants perçoivent-ils et mettent-ils en oeuvre cette continuité didactique ?

Notre recherche a montré que la continuité didactique est loin d'être assurée dans les faits et se heurte à de nombreuses difficultés, comme l'analyse des manuels scolaires le met particulièrement en évidence. De plus, la façon dont est traitée la méthode d'Euler permet de constater que les deux enseignements s'ignorent, et vont même jusqu'à donner l'impression qu'il y a en réalité deux méthodes d'Euler différentes, selon la discipline. Enfin, l'analyse des réponses d'enseignants des deux disciplines à un questionnaire confirme les difficultés de mise en oeuvre d'une continuité didactique entre les deux disciplines et permet d'en identifier certaines causes.

MOTS- CLES :

Mathématiques, physique, équation différentielle, méthode d'Euler, didactique, continuité didactique.

Éditeur: IREM de Paris 7
Responsable de la publication: C. Hache
IREM de Paris 7 – Case 7018
Université Paris Diderot
75205 Paris cedex 13
iremp7@math.jussieu.fr
http://iremp7.math.jussieu.fr

Dépôt légal : novembre 2009
ISBN : 978-2-86612-315-4